Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ
Часть 2

УЧЕБНИК И ПРАКТИКУМ ДЛЯ СПО

Под редакцией **Н. Ш. Кремера**

5-е издание, переработанное и дополненное

Рекомендовано Учебно-методическим отделом среднего профессионального образования в качестве учебника и практикума для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования

Москва ▪ Юрайт ▪ 2019

УДК 51(075.32)
ББК 22.1я723
К79

***Ответственный редактор*:**

Кремер Наум Шевелевич — почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации, профессор кафедры «Математика» Департамента математики Финансового университета при Правительстве Российской Федерации.

***Рецензенты*:**

кафедра высшей математики Московского государственного университета экономики, статистики и информатики (заведующий кафедрой — профессор *Никишкин В. А.*);

Солодовников А. С. — доктор физико-математических наук, заслуженный деятель науки Российской Федерации.

К79 **Высшая математика для экономистов. В 3 ч. Часть 2** : учебник и практикум для СПО / под ред. Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., пер. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 240 с. : [1] с. цв. вкл. — (Серия : Профессиональное образование).

ISBN 978-5-534-10173-7 (ч. 2)
ISBN 978-5-534-10172-0

Эта книга — не только учебник, но и полноценное руководство к решению задач. Основные положения учебного материала дополняются задачами с решениями и для самостоятельной работы, раскрывается экономический смысл математических понятий, приводятся простейшие приложения математики в экономике.

Существенным отличием книги является наличие в ней наряду с традиционными контрольными заданиями (60 вариантов, более 400 задач) тестовых заданий (27 тестов, более 400 тестовых заданий).

Это позволяет эффективно использовать учебник при проведении контрольных работ, тестировании студентов, приеме зачетов и экзаменов, а также при самоконтроле.

Соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования и профессиональным требованиям.

Для студентов колледжей специальностей экономики и управления (менеджмента), а также экономистов, преподавателей и лиц, занимающихся самообразованием.

УДК 51(075.32)
ББК 22.1я723

ISBN 978-5-534-10173-7 (ч. 2)
ISBN 978-5-534-10172-0

Оглавление

Раздел III
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Раздел II
ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

ГЛАВА 5
ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС

5.1. Понятие множества

Понятие множества принадлежит к числу первичных, не определяемых через более простые.

Под *множеством* понимается совокупность (собрание, набор) некоторых объектов. Объекты, которые образуют множество, называются *элементами,* или *точками,* этого множества. Примерами множеств являются множество студентов данного вуза, множество предприятий некоторой отрасли, множество натуральных чисел и т.п.

Множества обозначаются прописными буквами, а их элементы — строчными. Если a есть элемент множества A, то используется запись $a \in A$. Если b не является элементом множества A, то пишут $b \notin A$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом $\varnothing$. Например, множество действительных корней уравнения $x^2 + 1 = 0$ есть пустое множество.

Если множество B состоит из части элементов множества A или совпадает с ним, то множество B называется *подмножеством* множества A и обозначается $B \subset A$. Если, например, A — множество всех студентов вуза, а B — множество студентов-первокурсников этого вуза, то B есть подмножество A, т.е. $B \subset A$.

Два множества называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов.

Объединением двух множеств A и B называется множество C, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из данных множеств, т.е. $C = A \bigcup B$.

Пересечением двух множеств A и B называется множество D, состоящее из всех элементов, одновременно принадлежащих каждому из данных множеств A и B, т.е $D = A \bigcap B$.

Разностью множеств A и B называется множество E, состоящее из всех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B, т.е. $E = A \setminus B$.

Пример 5.1. Даны множества $A = \{1; 3; 6; 8\}$ и $B =\{2; 4; 6; 8\}$. Найти объединение, пересечение и разность множеств A и B.

Решение. Очевидно, что объединение двух данных множеств — $A \bigcup B = \{1; 2; 3; 4; 6; 8\}$, их пересечение $A \bigcap B = \{6; 8\}$ а разность $A \setminus B = \{1; 3\}$. ►

Дополнением множества $A \subset B$ называется множество A^c, состоящее из всех элементов множества B, не принадлежащих A.

Прямым, или *декартовым*, *произведением* множеств X и Y, т.е. множеством $X \times Y$, называется множество, элементы которого представляют всевозможные упорядоченные пары элементов множеств X и Y (например, декартово произведение координатных осей Ox и Oy есть плоскость Oxy).

Множество называется *конечным*, если содержит конечное число элементов; в противном случае — *бесконечным*.

Если между множествами A и B можно установить взаимно однозначное соответствие (каждому элементу $a \in A$ соответствует один элемент $b \in B$ и наоборот), то говорят, что множества A и B имеют одинаковую *мощность*, или *эквивалентны*. Множество, эквивалентное множеству натуральных чисел, называется *счетным* (его элементы можно пронумеровать, пересчитать).

Множество X называется *ограниченным сверху* (*снизу*), если существует такое число C, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $x \leq C$ ($x \geq C$). Число C в этом случае называется *верхней* (*нижней*) *гранью* множества X. Множество, ограниченное и сверху, и снизу, называется *ограниченным*.

Наименьшее из чисел, ограничивающих множество X сверху, называется *точной верхней гранью* данного множества и обозначается символом $\sup X$ (от лат. supremum), а наибольшее из чисел, ограничивающих множество X снизу, — *точной нижней гранью* этого множества и обозначается символом inf X (от лат. infinum). Например, для множества $X = (a, b)$ $a = \inf X$, $b = \sup X$.

Множества, элементами которых являются действительные числа, называются *числовыми*. Из школьного курса алгебры известны множества чисел: R — действительных, Q — рациональных, I — иррациональных, Z — целых, N — натуральных. Очевидно, что $N \subset Z \subset Q \subset R$, $I \subset R$ и $R = Q \bigcup I$.

Рис. 5.1

Геометрически множество действительных чисел R изображается точками *числовой прямой*, или *числовой оси* (рис. 5.1), т.е. прямой, на которой выбрано начало отсчета, положительное направление и единица масштаба.

Между множеством действительных чисел и точками числовой прямой существует взаимно однозначное соответствие, т.е. каждому действительному числу соответствует определенная точка числовой прямой, и наоборот, каждой точке прямой — определенное действительное число, поэтому часто вместо «число x» говорят «точка x».

Множество X, элементы которого удовлетворяют неравенству $a \le x \le b$, называется *отрезком*, или *сегментом*, $[a; b]$, неравенству $a < x < b$ — *интервалом* $(a; b)$, неравенствам $a \le$ $\le x < b$ или $a < x \le b$ — *полуинтервалами* соответственно $[a; b)$ и $(a; b]$. Наряду с этим рассматриваются бесконечные интервалы и полуинтервалы $(-\infty; a)$, $(b; +\infty)$, $(-\infty; +\infty)$, $(-\infty; a]$ и $[b; +\infty)$. В дальнейшем все указанные множества объединяем термином *промежуток* X.

5.2. Абсолютная величина действительногочисла. Окрестность точки

Определение. ***Абсолютной величиной*** (или ***модулем***) действительного числа x называется само число x, если x неотрицательно, и противоположное число $(-x)$, если x отрицательно:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \ge 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

По определению очевидно, что $|x| \ge 0$.

Пример 5.2. Найти $|x-|x||$.

Решение. Если $x \ge 0$, то $|x| = x$ и $|x-|x|| = |x-x| = |0| = 0$.

Если $x < 0$, то $|x| = -x$ и $|x-|x|| = |x-(-x)| = |2x| = -2x$.

Отметим свойства абсолютных величин:

$$|x+y| \le |x|+|y|; \quad |xy| = |x||y|;$$

$$|x-y| \ge |x|-|y|; \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}. \tag{5.2}$$

Абсолютная величина разности двух чисел $|x - a|$ означает расстояние между точками x и a числовой прямой как для случая $x < a$, так и для $x > a$ (рис. 5.2). Поэтому, например, решениями неравенства $|x - a| < \varepsilon$ (где $\varepsilon > 0$) будут точки x интервала $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ (рис. 5.3), удовлетворяющие неравенству $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$.

Всякий интервал, содержащий точку a, называется *окрестностью точки* a.

Интервал $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$, т.е. множество точек x таких, что $|x - a| < \varepsilon$ (где $\varepsilon > 0$), называется ε-*окрестностью точки* a.

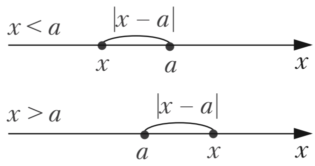


Рис. 5.2

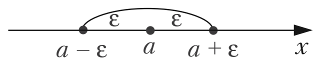


Рис. 5.3

5.3. Понятие функции. Основные свойства функции

Постоянной величиной называется величина, сохраняющая одно и то же значение. Например, отношение длины окружности к ее диаметру есть постоянная величина, равная числу π.

Если величина сохраняет постоянное значение лишь в условиях данного процесса, то в этом случае она называется *параметром*.

Переменной называется величина, которая может принимать различные числовые значения. Например, при равномерном движении $S = vt$, где путь S и время t — переменные величины, а скорость v — параметр.

Перейдем к понятию функции.

Определение. Если каждому значению x множества X ($x \in X$) ставится в соответствие вполне определенное значение y множества $Y(y \in Y)$, то говорят, что на множестве X задана ***функция*** $y = f(x)$.

При этом x называется *независимой переменной*, или *аргументом*, y — *зависимой переменной*, а буква f обозначает закон соответствия.

Множество X называется *областью определения*, или *существования*, функции, а множество Y — *областью значений* функции.

Если множество X специально не оговорено, то под областью определения функции подразумевается область допустимых значений независимой переменной x, т.е. множество таких значений x, при которых функция $y = f(x)$ вообще имеет смысл. Например, область определения функции $y = x^2 + \sqrt{10 - x}$ есть полуинтервал $(-\infty; 10]$, так как $10 - x \geq 0$. Если же переменная x обозначает, предположим, время, то при естественном дополнительном условии $x \geq 0$ областью определения функции будет отрезок $[0; 10]$.

Способы задания функций. Существует несколько способов задания функции.

а) *Аналитический способ*, если функция задана формулой вида $y = f(x)$. Этот способ наиболее часто встречается на практике. Так, функция $y = x^2 + \sqrt{10 - x}$, рассматриваемая выше, задана аналитически.

Не следует смешивать функцию с ее аналитическим выражением. Например, *одна* функция

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x < 0, \\ x + 3, & \text{если } x \geq 0, \end{cases}$$

имеет *два* аналитических выражения: x^2 (при $x < 0$) и $x + 3$ (при $x \geq 0$).

б) *Табличный способ*, если функция задана таблицей, содержащей значения аргумента x и соответствующие значения функции $f(x)$, например, таблица логарифмов.

в) *Графический способ*, если функция изображена в виде графика — множества точек (x, y) плоскости, абсциссы которых есть значения аргумента x, а ординаты — соответствующие им значения функции $y = f(x)$.

г) *Словесный способ*, если функция описана правилом ее составления, например, функция Дирихле[1]: $f(x) = 1$, если x — рационально; $f(x) = 0$, если x — иррационально.

Функция может быть задана *программой*, вычисляющей ее значения с помощью компьютера.

Основные свойства функций. К ним относятся четность и нечетность, монотонность, ограниченность, периодичность.

1. ***Четность и нечетность***. Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если для любых значений x из области определения $f(-x) = f(x)$, и *нечетной*, если $f(-x) = -f(x)$. В противном случае функция $y = f(x)$ называется функцией *общего вида*.

Например, функция $y = x^2$ является четной, так как $f(-x) = (-x)^2 = x^2$ и $f(-x) = f(x)$, а функция $y = x^3$ — нечетной, так как $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$ и $f(-x) = -f(x)$. В то же время, например, функция $y = x^2 + x^3$ является функцией общего вида, так как $f(-x) = (-x)^2 + (-x)^3 = x^2 - x^3$ и $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси ординат (см., например, график функции $y = x^2$ на рис. 5.6), а график нечетной функции симметричен относительно начала координат (см., например, график функции $y = x^3$ на рис. 5.5).

2. ***Монотонность***. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на промежутке X, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции.

Пусть $x_1, x_2 \in X$ и $x_2 > x_1$. Тогда функция возрастает на промежутке X, если $f(x_2) > f(x_1)$, и убывает, если $f(x_2) < f(x_1)$ (рис. 5.4).

[1] Дирихле Петер Густав (1805—1859) — немецкий математик.

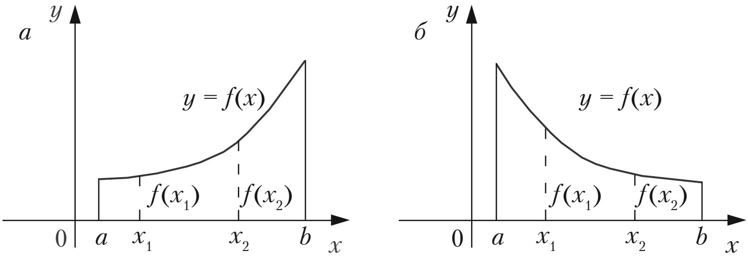


Рис. 5.4

Функции возрастающие и убывающие называются *монотонными*[1] функциями. Так, например функция $y = x^2$ (см. рис. 5.6) при $x \in (-\infty; 0]$ убывает и при $x \in [0; +\infty)$ возрастает.

3. ***Ограниченность***. Функция $f(x)$ называется *ограниченной* на промежутке X, если существует такое положительное число $M > 0$, что $|f(x)| \le M$ для любого $x \in X$. В противном случае функция называется *неограниченной*. Например, функция $y = \sin x$ ограничена на всей числовой оси, ибо $|\sin x| \le 1$ для любого $x \in R$.

4. ***Периодичность***. Функция $y = f(x)$ называется *периодической* с периодом $T \ne 0$, если для любых x из области определения функций $f(x + T) = f(x)$. Например, функция $y = \sin x$ имеет период[2] $T = 2\pi$, так как для любых значений x $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.

График периодической функции $y = f(x)$ может быть получен сдвигом кривой $y = f(x)$ $(x \in [0; T])$ вправо (влево) на отрезки T, $2T$, ...

---

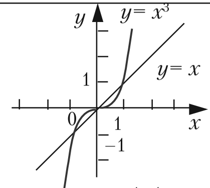
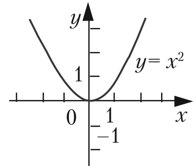
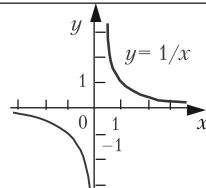
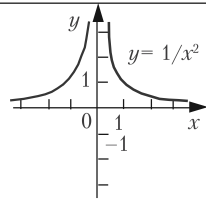
[1] Если говорить точнее, то возрастающие и убывающие функции называются *строго монотонными*. К монотонным функциям, кроме указанных, относятся *неубывающие* и *невозрастающие* функции, т.е. такие, для которых при $x_1, x_2 \in X$, удовлетворяющих условию $x_2 > x_1$, соответственно $f(x_2) \ge f(x_1)$ или $f(x_2) \le f(x_1)$.

[2] Под термином «период» подразумевается наименьший положительный период функции, равный 2π; любой период функции $y = \sin x$, как известно, равен $2\pi n$, где $n \in Z$.

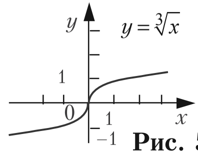
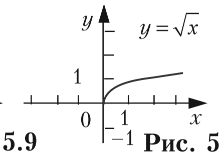
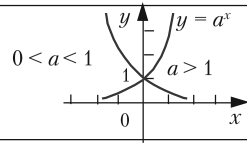
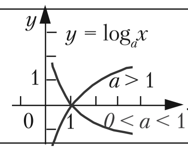
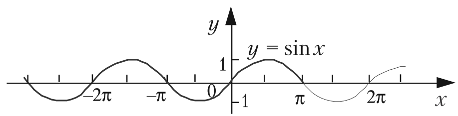
5.4. Основные элементарные функции

В таблице приводятся наиболее важные свойства и графики основных элементарных функций.

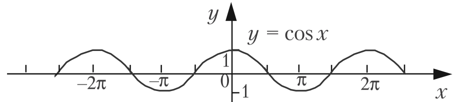
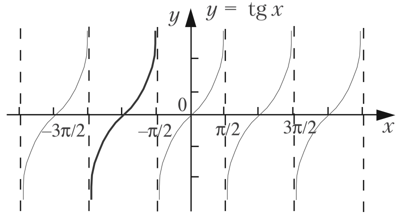
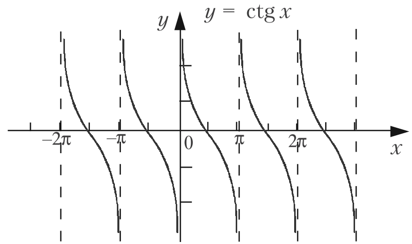
Таблица

Обозначение	Область определения функции	Область значений X	Четность, нечетность Y	Монотонность	Периодичность	Графики функций
1	2	3	4	5	6	7
1. Степенная функция						
$y=x^n$	$(-\infty; +\infty)$ $(n \in N)$	$(-\infty; +\infty)$, если n — нечетно; $[0; +\infty)$, если n — четно	Нечетная, если n — нечетно; четная, если n — четно	Возрастает на $(-\infty; +\infty)$, если n — нечетно; убывает на $(-\infty; 0]$, возрастает на $(0; +\infty)$, если n — четно	Непериодическая	 Рис. 5.5  Рис. 5.6
$y = x^{-n}$ $(n \in N)$	$(-\infty; 0) \cup$ $\cup$ $(0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup$ $\cup$ $(0, +\infty)$ если n — нечетно; $[0; +\infty)$, если n — четно	Нечетная, если n — нечетно; четная, если n — четно	Убывает на $(-\infty; 0)$ и на $(0, +\infty)$, если n — нечетно; возрастает на $(-\infty; 0)$ и убывает на $(0; +\infty)$, если n — четно	Непериодическая	 Рис. 5.7  Рис. 5.8

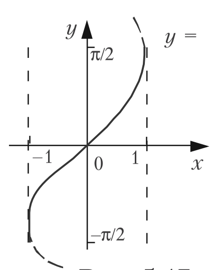
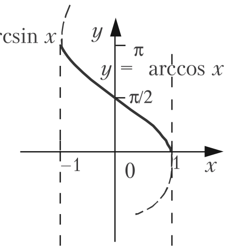
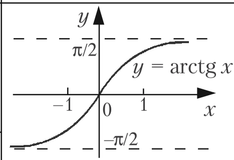
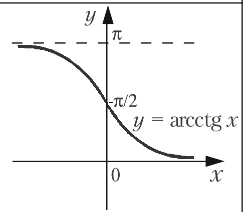
Продолжение табл.

1	2	3	4	5	6	7
$y = \sqrt[n]{x}$ ($n \in N$, $n > 1$)	$(-\infty;\ +\infty)$, если n — нечетно; $[0;\ +\infty)$ если n — четно	$(-\infty;\ +\infty)$, если n — нечетно; $[0;\ +\infty)$ если n — четно	Нечетная, если n — нечетно; общего вида, если n — четно	Возрастает на $(-\infty;\ +\infty)$, если n — нечетно; возрастает на $[0;\ +\infty)$, если n — четно	Непериодическая	 **Рис. 5.9**  **Рис. 5.10**
2. Показательная функция						
$y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)	$(-\infty;\ +\infty)$	$(0;\ +\infty)$	Общего вида	Возрастает на $(-\infty;\ +\infty)$, если $a > 1$; убывает на $(-\infty;\ +\infty)$, если $0 < a < 1$	Непериодическая	 **Рис. 5.11**
3. Логарифмическая функция						
$y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)	$(0;\ +\infty)$	$(-\infty;\ +\infty)$	Общего вида	Возрастает на $(0;\ +\infty)$, если $a > 1$; убывает на $(0;\ +\infty)$, если $0 < a < 1$	Непериодическая	 **Рис. 5.12**
4. Тригонометрические функции						
$y = \sin x$	$(-\infty;\ +\infty)$	$[-1;\ 1]$	Нечетная	Возрастает на $[-\pi/2 + 2\pi n;$ $\pi/2 + 2\pi n]$; убывает на $[\pi/2 + 2\pi n;$ $3\pi/2 + 2\pi n]$, $n \in Z$	Период $T = 2\pi$	 **Рис. 5.13**

Продолжение табл.

1	2	3	4	5	6	7
$y = \cos x$	$(-\infty; +\infty)$	$[-1; 1]$	Четная	Возрастает на $[-\pi + 2\pi n;$ $2\pi n]$; убывает на $[2\pi n;$ $\pi + 2\pi n]$, $n \in Z$	Период $T = 2\pi$	 **Рис. 5.14**
$y = \operatorname{tg} x$	$(-\pi/2 +$ $+ \pi n;$ $\pi/2 + \pi n)$; $n \in Z$	$(-\infty; +\infty)$	Нечетная	Возрастает на $(-\pi/2 + \pi n;$ $\pi/2 + \pi n)$, $n \in Z$	Период $T = \pi$	 **Рис. 5.15**
$y = \operatorname{ctg} x$	$(\pi n; \pi +$ $+ \pi n)$; $n \in Z$	$(-\infty; +\infty)$	Нечетная	Убывает на $(\pi n; \pi + \pi n)$, $n \in Z$	Период $T = \pi$	 **Рис. 5.16**

Окончание табл.

1	2	3	4	5	6	7
			5. Обратные тригонометрические функции			
$y =$ $= \arcsin x$ (арксинус)	$[-1;\ 1]$	$[-\pi/2;\ \pi/2]$	Нечетная	Возрастает на $[-1;\ 1]$	Непериодическая	 **Рис. 5.17**  **Рис. 5.18**
$y =$ $= \arccos x$ (арккосинус)	$[-1;\ 1]$	$[0;\ \pi]$	Общего вида	Убывает на $[-1;\ 1]$	Непериодическая	
$y =$ $= \mathrm{arctg}\, x$ (арктангенс)	$(-\infty;\ +\infty)$	$(-\pi/2;\ \pi/2)$	Нечетная	Возрастает на $(-\infty;\ +\infty)$	Непериодическая	 **Рис. 5.19**  **Рис. 5.20**
$y =$ $= \mathrm{arcctg}\, x$ (арккотангенс)	$(-\infty;\ +\infty)$	$(0;\ \pi)$	Общего вида	Убывает на $(-\infty;\ +\infty)$	Непериодическая	
			6. Гиперболические функции			
$y = \mathrm{ch}\, x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (гиперболический косинус); $y = \mathrm{sh}\, x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (гиперболический синус)						

5.5. Элементарные функции. Классификация функций. Преобразование функций

Функция называется *явной*, если она задана формулой $y = f(x)$, в которой правая часть не содержит зависимой переменной; например функция $y = x^2 + 5x + 1$.

Функция y аргумента x называется *неявной*, если она задана уравнением $F(x, y) = 0$, не разрешенным относительно зависимой переменной. Например, функция y ($y \geq 0$), заданная уравнением $x^3 + y^2 - x = 0$. (Заметим, что последнее уравнение задает две функции: $y = \sqrt{x - x^3}$ при $y \geq 0$ и $y = -\sqrt{x - x^3}$ при $y < 0$.)

Графиком уравнения $F(x, y) = 0$ называется множество точек (x, y) плоскости, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Функция $y = f(x)$ может быть *заданной параметрически* на множестве X посредством переменной t, называемой *параметром*: $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $t \in X$. В этом случае график функции $y = f(x)$ есть множество точек $(x(t), y(t))$. Например, параметрическое уравнение верхней полуокружности $x^2 + y^2 = R^2$ ($y \geq 0$), или $y = +\sqrt{R^2 - x^2}$, имеет вид

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases} \tag{5.3}$$

где $t \in [0;\ \pi]$. (Заметим, что уравнение окружности $x^2 + y^2 = R^2$ определяет две функции: $y = +\sqrt{R^2 - x^2}$, $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$, задаваемых параметрическими уравнениями (5.3) при $t \in [0;\ 2\pi]$.)

Обратная функция. Пусть $y = f(x)$ есть функция от независимой переменной x, определенной на множестве X с областью значений Y. Поставим в соответствие каждому $y \in Y$ *единственное* значение $x \in X$, при котором $f(x) = y$. Тогда полученная функция $x = \varphi(y)$, определенная на множестве Y с областью значений X, называется *обратной*.

Так как традиционно независимую переменную обозначают через x, а функцию — через y, то функция, обратная к функции $y = f(x)$, примет вид $y = \varphi(x)$. Обратную функцию

$y = \varphi(x)$ обозначают также в виде $y = f^{-1}(x)$ (аналогично с обозначением обратной величины). Например, для функции $y = a^x$ обратной будет функция $x = \log_a y$, или (в обычных обозначениях зависимой и независимой переменных) $y = \log_a x$.

Можно доказать, что для *любой строго монотонной функции* $y = \varphi(x)$ существует *обратная функция*.

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов (на рис. 5.21 показаны графики взаимно обратных функций $y = a^x$ и $y = \log_a x$ при $a > 1$).

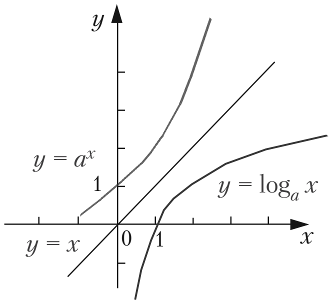


Рис. 5.21

Сложная функция. Пусть функция $y = f(u)$ есть функция от переменной u, определенной на множестве U с областью значений Y, а переменная u в свою очередь является функцией $u = \varphi(x)$ от переменной x, определенной на множестве X с областью значений U. Тогда заданная на множестве X функция $y = f[\varphi(x)]$ называется *сложной функцией* (или *композицией функций*, *суперпозицией функций*, *функцией от функции*). Например, $y = \lg \sin x$ — сложная функция, так как ее можно представить в виде $y = \lg u$, где $u = \sin x$.

Понятие элементарной функции. Из основных функций новые функции могут быть получены двумя способами: а) с помощью алгебраических действий; б) с помощью операций образования сложной функции.

Определение. Функции, построенные из основных элементарных функций с помощью конечного числа алгебраических действий и конечного числа операций образования сложной функции, называются ***элементарными***.

Например, функция

$$y = \frac{\sqrt{x}\sin^2 x}{\sqrt[3]{x + 5^{2x^3}}} + \sqrt{\lg^3 x - 1}$$

является элементарной, так как здесь число операций сложения, вычитания, умножения, деления и образования сложной функции $\left(\sin^2 x, 5^{2x^3}, \lg^3 x, \sqrt{\lg^3 x - 1}\right)$ конечно.

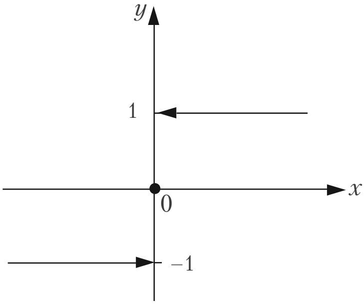


Рис. 5.22

Примерами неэлементарных функций являются функции: $y = [x]$ — целая часть x (см. рис. 6.9); $y = \operatorname{sign} x$ (читается «y равно сигнум x») — знак числа x ($\operatorname{sign} x = \{-1$, если $x < 0$; 0, если $x = 0$; 1, если $x > 0\}$, (рис. 5.22); функция Дирихле (с. 267).

Классификация функций. Элементарные функции делятся на алгебраические и неалгебраические (трансцендентные).

Алгебраической называется функция, в которой над аргументом проводится конечное число алгебраических действий. К числу алгебраических функций относятся:

• *целая рациональная функция* (*многочлен* или *полином*):

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n;$$

• *дробно-рациональная функция* — отношение двух многочленов;

• *иррациональная функция* (если в составе операций над аргументом имеется извлечение корня).

Всякая неалгебраическая функция называется *трансцендентной*. К числу трансцендентных функций относятся: показательная, логарифмическая, тригонометрические, обратные тригонометрические, гиперболические функции.

Преобразование графиков. В разд. III будет показано, как проводить исследование функций и построение их графиков с помощью производной. Вместе с тем актуальными остаются приемы построения графиков функций с помощью преобразования графиков основных элементарных функций.

Пусть задан график функции $y = f(x)$.

Справедливы следующие утверждения (правила).

1. График функции $y = f(x + a)$ есть график $y = f(x)$, сдвинутый (при $a > 0$ влево, при $a < 0$ вправо) на $|a|$ единиц параллельно оси Ox (рис. 5.23).

2. График функции $y = f(x) + b$ есть график $y = f(x)$, сдвинутый (при $b > 0$ вверх, при $b < 0$ вниз) на $|b|$ единиц параллельно оси Oy (см. рис. 5.23).

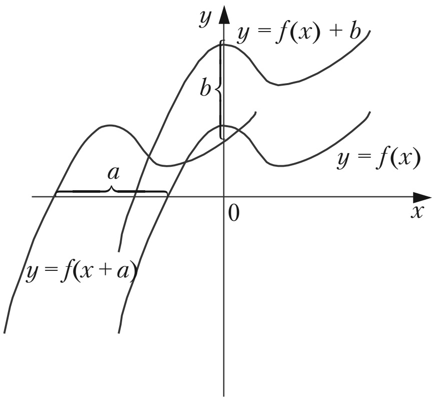


Рис. 5.23

3. График функции $y = mf(x)$ $(m \neq 0)$ есть график $y = f(x)$, растянутый (при $m > 1$) в m раз или сжатый (при $0 < m < 1$) вдоль оси Oy (рис. 5.24). При $-\infty < m < 0$ график функции $y = mf(x)$ есть зеркальное отображение графика $y = -mf(x)$ от оси Ox.

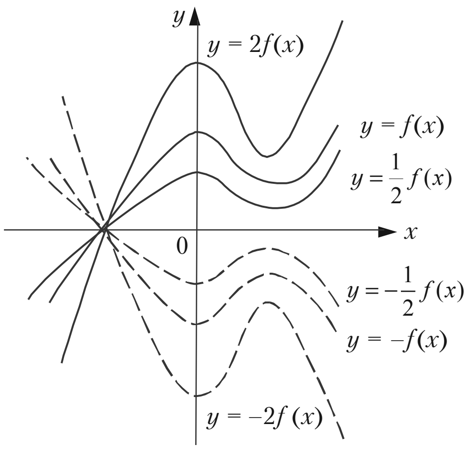


Рис. 5.24

4. График функции $y = f(kx)$ $(k \neq 0)$ есть график $y = f(x)$, сжатый (при $k > 1$) в k раз или растянутый (при $0 < k < 1$) вдоль оси Ox (рис. 5.25). При $-\infty < k < 0$ график функции $y = f(kx)$ есть зеркальное отображение графика $y = f(-kx)$ от оси Oy.

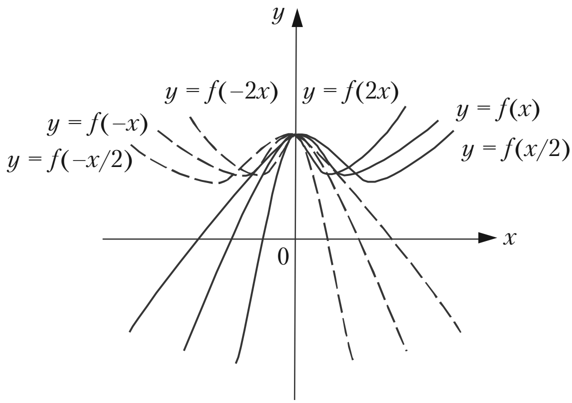


Рис. 5.25

Пример 5.3. Построить график функции $y = -3\cos 2x$.

Решение. Проводим построение графика следующим образом (рис. 5.26):

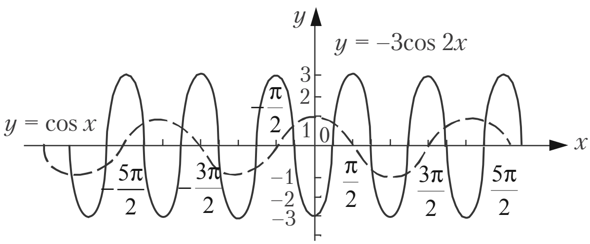


Рис. 5.26

1) строим график $y = \cos x$;

2) $y = \cos x \rightarrow$ сжатие графика в два раза вдоль оси $Ox \rightarrow$ $\rightarrow y = \cos 2x$;

3) $y = \cos 2x \rightarrow$ зеркальное отражение графика от оси $Ox \rightarrow y = -\cos 2x$;

4) $y = -\cos 2x \rightarrow$ растяжение графика в три раза вдоль оси $Oy \rightarrow y = -3\cos 2x$. ►

5.6. Применение функций в экономике

Функции находят широкое применение в экономической теории и практике. Спектр используемых в экономике функций весьма широк: от простейших линейных до функций, получаемых по определенному алгоритму с помощью так называемых рекуррентных соотношений, связывающих состояния изучаемых объектов в разные периоды времени.

Наряду с линейными используются нелинейные функции: дробно-рациональные, степенные (квадратичная, кубическая и т.д.), показательные (экспоненциальные), логарифмические и др. Периодичность, колеблемость ряда экономических процессов позволяет также применять тригонометрические функции.

Наиболее часто в экономике используются следующие функции.

1. *Функция полезности* (*функция предпочтений*) — в широком смысле зависимость полезности, т.е. результата, эффекта некоторого действия от уровня (интенсивности) этого действия.

2. *Производственная функция* — зависимость результата производственной деятельности от обусловивших его факторов.

3. *Функция выпуска* (частный вид производственной функции) — зависимость объема производства от наличия или потребления ресурсов.

4. *Функция издержек* (частный вид производственной функции) — зависимость издержек производства от объема выпуска продукции.

5. *Функции спроса*, *потребления*, *предложения* — зависимость объема спроса, потребления, предложения на отдельные товары или услуги от различных факторов (например, цены, дохода и т.п.).

Учитывая, что экономические явления и процессы обусловливаются действием различных факторов, для их исследований широко используются *функции нескольких переменных*[1]. Среди них выделяются *мультипликативные функции*, позволяющие представить зависимую переменную в виде произведения факторных переменных, обращающего его в нуль при отсутствии действия хотя бы одного фактора.

Используются также *сепарабельные функции*, которые дают возможность выделить влияние различных факторных переменных на зависимую переменную, и, в частности, *аддитивные функции*, представляющие одну и ту же зави-

[1] Функции нескольких переменных рассмотрены в гл. 9 (ч. 3).