И. В. Садовничая, Т. Н. Фоменко, Е. В. Хорошилова

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ АКАДЕМИЧЕСКОГО БАКАЛАВРИАТА

Под общей редакцией **В. А. Ильина**

2-е издание, переработанное и дополненное

Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по естественнонаучным направлениям

Книга доступна в электронной библиотечной системе
biblio-online.ru

Москва ▪ Юрайт ▪ 2019

УДК 517(075.8)
ББК 22.16я73
С14

***Авторы*:**

Садовничая Инна Викторовна — доцент, доктор физико-математических наук, доцент кафедры общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова;

Фоменко Татьяна Николаевна — доцент, доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова;

Хорошилова Елена Владимировна — доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

***Ответственный редактор*:**

Ильин Владимир Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН, главный научный сотрудник математического института имени В. А. Стеклова, лауреат Государственной премии СССР и Премии президента РФ в области образования.

***Рецензенты*:**

Фомичев В. В. — профессор, доктор физико-математических наук, заместитель заведующего кафедрой нелинейных динамических систем и процессов управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова;

Тихомиров В. В. — доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей математики, заместитель декана по учебно-методической работе факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Садовничая, И. В.

С14 Математический анализ. Вещественные числа и последовательности : учеб. пособие для академического бакалавриата / И. В. Садовничая, Т. Н. Фоменко, Е. В. Хорошилова ; под общ. ред. В. А. Ильина. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 109 с. — (Серия : Бакалавр. Академический курс).

ISBN 978-5-534-08461-0

Учебное пособие посвящено темам «Вещественные числа» и «Числовые последовательности». В первой главе рассматриваются элементы теории множеств, операции над ними, эквивалентности и порядки, сравнение вещественных чисел, их алгебраическая система. Вторая глава содержит понятие последовательности, характеризует особенности сходящихся и монотонных последовательностей, критерий Коши. В третьей главе предлагаются задачи с подробными решениями, а также для самостоятельной работы студентов.

Соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по естественнонаучным направлениям, аспирантов и преподавателей.

УДК 517(075.8)
ББК 22.16я73

Delphi Law Company

Все права защищены. Никакая часть данной книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме без письменного разрешения владельцев авторских прав. Правовую поддержку издательства обеспечивает юридическая компания «Дельфи».

© Коллектив авторов, 2011
© Коллектив авторов, 2018, с изменениями
© ООО «Издательство Юрайт», 2019

ISBN 978-5-534-08461-0

Оглавление

Предисловие

Уважаемые читатели!

Наша книга содержит материал по темам «Вещественные числа» и «Числовые последовательности» в объеме программы по математическому анализу для студентов 1 курса, с некоторыми дополнениями.

В книге три главы. В главах 1 и 2 излагается теоретический материал, в главе 3 предлагаются задачи по всем разделам первых двух глав.

В первой главе содержится материал по теме «Вещественные числа». Мелким шрифтом и горизонтальными линиями здесь выделен дополнительный материал, не входящий в программу 1 курса. Мы поместили его для полноты изложения данной темы.

Во второй главе содержится теоретический материал по теме «Числовые последовательности». В каждой из первых двух глав своя двойная нумерация определений и всех утверждений, с указанием номера параграфа.

В третьей главе помещены задачи по всем параграфам первых двух глав. Наряду с вычислительными задачами приводится ряд задач на доказательство. Мы полагаем, что их решение является одной из наиболее эффективных форм усвоения теоретического материала. При этом часть задач приводится с подробными решениями, а остальные даются для самостоятельной работы студентов. Все задачи снабжены ответами, а в некоторых случаях указаниями к решению.

В конце пособия мы приводим список основной и дополнительной литературы, где перечисляем учебники и задачники, которые использовались нами при написании данной книги, а также некоторые источники для дальнейшего знакомства с изложенными в книге темами.

Усвоив материал данной книги, студенты будут:

знать

- основные понятия и факты теории вещественных чисел и теории числовых последовательностей;

владеть

- основными методами доказательства теорем данного раздела математического анализа;
- приемами решения задач на доказательство;

уметь

- самостоятельно решать многие задачи по данной тематике;
- применять полученные знания для математической постановки и решения прикладных задач.

Книга предназначена в первую очередь для студентов 1 курса факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ, а также для первокурсников других университетов, изучающих математический анализ. Мы надеемся, что она окажется полезной как студентам, так и преподавателям при изучении или преподавании данной темы.

И. В. Садовничая,
Т. Н. Фоменко,
Е. В. Хорошилова

Глава 1. Вещественные числа.

§1. **Элементы теории множеств. Операции над множествами. Отображения множеств. Мощность множества.**

Определение 1.1. ***Множеством*** *называют совокупность объектов произвольной природы, называемых его* **элементами**.

Примеры.

1.1) множество точек на прямой;
1.2) множество студентов в аудитории;
1.3) множество натуральных чисел $\mathbb{N}$;
1.4) множество целых чисел $\mathbb{Z}$;
1.5) множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Если элемент a принадлежит множеству A, то пишут: $a \in A$. Если все элементы множества B содержатся в множестве A, то говорят, что B является *подмножеством* A, и пишут: $B \subseteq A$. Если при этом в множестве A есть элементы не принадлежащие B, то пишут: $B \subset A$. *Пустым множеством* называют условное множество, в котором нет ни одного элемента. Оно обозначается символом $\emptyset$. Пустое множество принято считать подмножеством любого множества.

Способы задания множеств.

1. *Перечисление элементов* множества (например: $A = \{1, 5, 7, 9\}$);

2. *Выделение признаков*, характеризующих элементы данного множества. Например: $k\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} | x-$ число,кратное $k\}$, где $k > 1$ - фиксированное натуральное число);

3. *Задание характеристической функции* множества A (в виде таблицы ее значений или графика). Это функция $\chi : B \to \{0, 1\}$, определенная на некотором множестве B, $A \subseteq B$, которая задается так: $\chi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin A, \\ 1, & x \in A. \end{cases}$

Основные операции над множествами.

Определение 1.2. ***Объединением*** *двух множеств A и B называется множество $A \cup B$, элементами которого являются как элементы множества A, так и элементы множества B. Иначе говоря, $x \in A \cup B$ тогда и только тогда, когда либо $x \in A$, либо $x \in B$. Кратко это можно записать так: $(x \in A \cup B) \Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B))$. Символ $\vee$ (логическая дизъюнкция) заменяет союз „или“ и означает выполнение хотя бы одного из тех условий, которые он соединяет.*

Определение 1.3. ***Пересечением*** *двух двух множеств A и B называется множество $A \cap B$, элементами которого являются общие элементы множеств A и B. Иначе говоря, $x \in A \cap B$ тогда и только тогда, когда одновременно $x \in A$ и $x \in B$. Кратко это можно записать так: $(x \in A \cap B) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B))$. Символ $\wedge$ (логическая конъюнкция) заменяет союз „и“ и означает одновременное выполнение тех условий, которые он соединяет.*

Определение 1.4. ***Дополнением*** *множества B до множества A (или* ***разностью*** *множеств A и B) называется множество $A \setminus B$, состоящее из тех элементов множества A, которые не принадлежат B. Кратко это можно записать так: $(x \in A \setminus B) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \notin B))$.*

Комбинируя основные операции, можно рассматривать более сложные операции, например, симметрическую разность.

Определение 1.5. ***Симметрической разностью*** *множеств A и B называется множество $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.*

Примеры.

1.6) $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ - все целые числа, не являющиеся натуральными;

1.7) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$;

1.8) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$;

1.9) $2\mathbb{Z} \triangle 3\mathbb{Z}$ - множество целых чисел, делящихся либо на 2, либо на 3, но не делящихся на 6.

Операции над множествами изображены символически штриховкой на Рис.1-4.

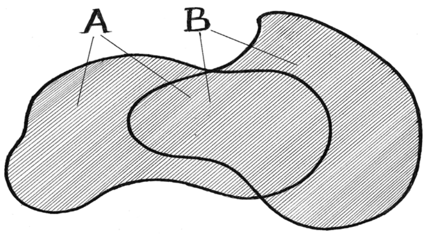

Рис. 1: Объединение множеств $A \cup B$.

Свойства операций над множествами.

Перечислим основные свойства объединения, пересечения и дополнения.

1)$A \cup \emptyset = A$;

2)$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;

3)$A \cup A = A$;

4)$A \cup B = B \cup A$;

5)$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

6)$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

7)$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = (A \setminus (B \cap C)$;

8)$(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$. $\square$

Свойства 7) и 8) называют *законами двойственности.* Благодаря им, в свойствах 3)-6) можно менять местами операции $\cup$ и $\cap$.

Отображения множеств.

Определение 1.6. ***Отображением*** $f : A \to B$ *из множества* A *в множество* B *называется правило* f, *со-*

поставляющее каждому элементу $a \in A$ единственный элемент $b = f(a) \in B$, который называют образом элемента a при отображении f, а всякий элемент a, для которого $b = f(a)$ (вообще говоря, не единственный), называют прообразом элемента b при отображении f.

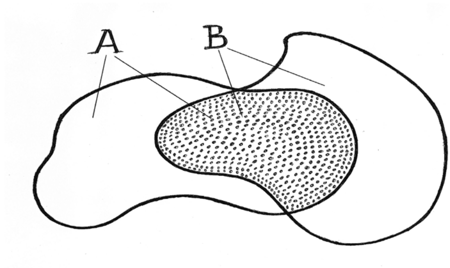

Рис. 2: Пересечение множеств $A \cap B$.

Определение 1.7. *Отображение $\varphi : A \to B$ из множества A в множество B, называется* ***взаимно-однозначным****, если одновременно выполнены следующие 2 условия:*

1) $(\varphi(a) = \varphi(b)) \Rightarrow (a = b)$ (инъективность),

2) $\forall b \in B \exists a, a \in A, \varphi(a) = b$ (сюръективность).

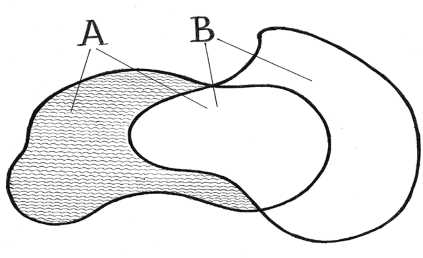

Рис. 3: Дополнение множеств $A \setminus B$.

Определение 1.8. *Если отображение* $\varphi : A \to B$ *из множества* A *в множество* B *взаимно-однозначно, то отображение, ставящее в соответствие каждому элементу* $y \in B$ *его прообраз (то есть единственный элемент* $x \in A$*, для которого* $\varphi(x) = y$*), называется **обратным** отображением и обозначается* $\varphi^{-1} : B \to A$.

Пример 1.10). Отображение $f : [0;1] \to [0;1]$, где $f(x) = x^2$, является взаимно-однозначным. Обратным к нему является отображение $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Мощность множества.

Определение 1.9. ***Мощность*** *(или* ***кардинал****, или* ***кардинальное число****) множества* A *- это характеристика множества, которая обозначается символом* $cardA$ *(или* $|A|$*) и определяется следующими свойствами:*

1) Если $A = \emptyset$*, то* $card(A) = 0$*;*

2) Если $A = \{1, 2, ..., n\}$*, то* $card(A) = n$*;*

3) $(card(A) = card(B)) \Longleftrightarrow (\exists \varphi : A \to B-$*взаимно-однозначное отображение);*

4) $(card(A) \leq card(B)) \Longleftrightarrow (\exists C, C \subseteq B, \exists \psi, \psi : A \to C -$ *взаимно-однозначное отображение);*

Отметим, что строгое неравенство мощностей: $card(A) < card(B)$ означает, что имеется взаимно-однозначное отображение множества A на некоторое подмножество $C, C \subset B$, не совпадающее с B. Однако при этом не существует никакого взаимно-однозначного отображения множества A на все множество B.

Примеры и обозначения мощностей.

1.11) Мощность множества натуральных чисел обозначается $card(\mathbb{N}) = \aleph_0$ (читается: *алеф-нуль*). Множества мощности $\aleph_0$ называются *счетными*.

1.12) Мощность множества точек интервала $(0;1)$ - $card((0;1)) = c$, читается: *континуум* (иногда обознача-

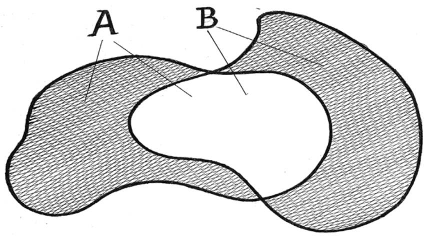

Рис. 4: Симметрическая разность множеств $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

ется также буквой алеф: $\aleph$). Множества мощности c называются *континуальными*.

1.13) 2^A - множество всевозможных подмножеств данного множества A, включая пустое подмножество и само множество A. Например, если $A = \{1, 2\}$, то $2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. При этом
$card(A) = 2 < card(2^A) = 4$.

На самом деле имеет место следующее общее утверждение.

Теорема 1.1. *Для всякого множества A верно, что $card(A) < card(2^A)$.* $\square$

Согласно определению мощности, конечные множества с различным числом элементов имеют разные мощности, равные числу элементов в каждом из них. Основное отличие бесконечных множеств от конечных состоит в том, что в бесконечном множестве всегда есть подмножество, не совпадающее со всем множеством, но равное ему по мощности. Это утверждение вытекает из следующего простого факта.

Лемма 1.1. *Если из множества $\mathbb{N}$ удалить один элемент - какое-нибудь число n, - то его мощность не из-*

меняется. То есть $card(\mathbb{N} \setminus \{n\}) = \aleph_0$.

Доказательство. Достаточно установить взаимно-однозначное отображение из исходного множества $\mathbb{N}$ в полученное множество
$\mathbb{N} \setminus \{n\}$. Положим $\varphi(k) = k$, если $1 \leq k \leq n-1$, и $\varphi(k) = k+1$, если $k \geq n$.

$$\varphi(k) = \begin{cases} k, & 1 \leq k \leq n-1; \\ k+1, & k \geq n. \end{cases}$$

Легко видеть, что отображение φ является взаимно-однозначным. $\square$

Пользуясь леммой 1.1, легко доказать следующее утверждение.

Следствие 1.1. *Удаление или добавление конечного числа элементов не меняет мощности любого бесконечного множества.* $\square$

§2. Отношения и операции на множестве. Эквивалентности, порядки, фактор-множество. Понятие об алгебраической системе.

Определение 2.1. ***Прямым произведением*** $n, n \geq 2$ *заданных непустых множеств* $A_1, A_2, ..., A_n$ *называется совокупность всевозможных упорядоченных наборов* $A_1 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) | a_i \in A_i, i = 1, 2, ..., n\}$.

Определение 2.2. n***-арным отношением*** *на данном непустом множестве* A *(*$n \geq 1$*) называется произвольное непустое подмножество его* n*-ой степени, то есть прямого произведения* $A \times \cdots \times A$ n *экземпляров множества* A. *При* $n = 0, 1, 2$ n*-арное отношение называют соответственно* ***нульарным, унарным, бинарным***.

Отметим, что отображение из множества A в множество B можно определять (подразумевая его график) как подмножество прямого произведения $A \times B$ с дополнительными свойствами. (Сравните следующее определение 2.3 с определением 1.6.)

Определение 2.3. ***Отображением*** *из множества A в множество B называется такое отношение $f \subseteq A \times B$, что выполнены 2 условия:*

1) $\forall a \in A, \exists b \in B, (a, b) \in f$;

2) $((a, b) \in f) \wedge ((a, c) \in f) \Rightarrow (b = c)$.

Рассмотрим два наиболее часто встречающиеся типа бинарных отношений на множествах, а именно, отношения эквивалентности и отношения порядка. Пусть А - некоторое непустое множество.

Определение 2.4. *Бинарное отношение $\tau \subseteq A \times A$ называется* ***эквивалентностью****, если оно удовлетворяет следующим свойствам:*

1) $\forall a \in A, (a, a) \in \tau$ *(рефлексивность);*

2) $((a, b) \in \tau) \Rightarrow ((b, a) \in \tau)$*(симметричность);*

3) $((a, b) \in \tau) \wedge (b, c) \in \tau)) \Rightarrow ((a, c) \in \tau)$*(транзитивность).*

При этом, если $(a, b) \in \tau$, то говорят, что элементы a, b являются τ-эквивалентными друг другу. В этом случае применяется также обозначение: $a\tau b$.

Определение 2.5. ***Разбиением*** *непустого множества A называется совокупность его непустых подмножеств $S = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$, где I - некоторое непустое множество индексов, и выполнены следующие два условия:*

$$1) \quad U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset, \text{ если } \alpha, \beta \in I \text{ и } \alpha \neq \beta; \quad 2) \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = A.$$

Связь эквивалентностей с разбиениями.

Легко заметить, что всякому разбиению S соответствует эквивалентность τ_S, задаваемая по правилу: $((x, y) \in \tau_S) \Leftrightarrow (\exists \alpha \in I, x, y \in U_\alpha)$. Обратно, если задана эквивалентность τ на A, то ей можно сопоставить разбиение S_τ, состоящее из подмножеств вида $< x >_\tau := \{y \in A| \quad y\tau x\}$, которые называются классами эквивалентности τ элементов $x \in A$. При этом очевидно, что сопоставляемая такому разбиению эквивалентность, как описано выше, совпадает с исходной эквивалентностью τ.

Корректность таких сопоставлений читатель легко докажет самостоятельно.

Пусть теперь τ - некоторая эквивалентность на непустом множестве А.

Определение 2.6. ***Фактормножеством*** *множества A по эквивалентности* τ *называется множество* A_τ *всех классов эквивалентности по отношению* τ*. Сопоставление каждому элементу множества A его класса эквивалентности задает естественное каноническое отображение* $\varphi_\tau : A \to A_\tau$*, называемое также отображением факторизации множества A по заданной эквивалентности* τ*.*

Пример 2.1). Зададим на множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел эквивалентность, полагая числа n и m эквивалентными тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые остатки от деления на 3. Читатель самостоятельно проверит, что это правило действительно определяет эквивалентность. Легко видеть, что образуется три класса эквивалентности, то есть соответствующее фактормножество состоит из трех элементов: $< 0 >, < 1 >$ $, < 2 >$.

Кстати, введенное только что отношение эквивалентности обычно называют эквивалентностью по модулю 3 (или сравнением по модулю 3) и пишут: $n \equiv m(\mod 3)$, если n эквивалентно m. Аналогично определяются отношения эквивалентности по модулю n для любого натурального $n \geq 2$.

Определение 2.7. *Бинарное отношение* φ *на множестве A называется* ***частичным порядком****, если оно удовлетворяет следующим трем условиям:*

1) $\forall a \in A, (a, a) \in \tau$ *(рефлексивность);*

2) $((a, b) \in \tau) \wedge ((b, a) \in \tau) \Leftrightarrow (a = b)$ *(антисимметричность);*

3) $((a, b) \in \tau) \wedge ((b, c) \in \tau) \Rightarrow ((a, c) \in \tau)$*(транзитивность).*

Множество A с заданным на нем частичным порядком называют *частично упорядоченным множеством.*

Определение 2.8. *Бинарное отношение* τ *называют* ***линейным порядком*** *на множестве A, если* τ *- частичный по-*

рядок, и кроме того, любые два элемента $x, y \in A$ сравнимы, то есть обязательно либо $x\tau y$, либо $y\tau x$.

Примеры.

2.2) τ - отношение делимости на множестве $\mathbb{N}$, то есть $(x, y) \in \tau$ в точности тогда, когда y делится на x. Нетрудно убедиться, что в данном случае τ - отношение частичного порядка, не являющееся, однако, линейным порядком.

2.3) $\mathbb{Z}$ - множество целых чисел, $\leq$ - естественный порядок. В данном случае $(\mathbb{Z}, \leq)$ - линейно упорядоченное множество.

Операции на множестве.

Определение 2.9. *n-**арной операцией** ($n \geq 1$) на непустом множестве A называется произвольное отображение из A^n в A. При $n = 2$ операции называются **бинарными**, а при $n = 1$ - унарными. Под **нульарной** операцией понимают выделение (фиксацию) в множестве A некоторого элемента, обладающего особыми свойствами.*

Рассматривают также частичные $n-$арные операции, то есть определенные не на всем множестве A, а лишь на некоторой его части.

Примеры.

2.4) Бинарная операция *сложения целых чисел* задается как отображение $S : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, где $\forall (n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, S((n, m)) = n + m \in \mathbb{Z}$.

2.5) Операция *умножения рациональных чисел* задается как отображение $M : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, где $\forall (r, q) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, M((r, q)) = r \cdot q \in \mathbb{Q}$.

2.6) Бинарная операция *вычитания* задается на множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел как отображение из $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}$, с помощью бинарной операции сложения и унарной операции перехода к противоположному числу: $\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, a - b = a + (-b \in \mathbb{Z}$.

2.7) Частичная бинарная операция *деления* рациональных чисел задается как отображение из $\mathbb{Q} \times (\mathbb{Q} \setminus \{0\})$ в