



НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. В. Жуловян

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ МАШИНЫ: ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЭНЕРГИИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ СПО

Рекомендовано Учебно–методическим отделом среднего профессионального образования в качестве учебного пособия для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования

Книга доступна в электронной библиотечной системе
biblio-online.ru

Москва ■ Юрайт ■ 2019

УДК 621.314(075.32)

ББК 31.261я723

Ж87

Автор:

Жуловян Владимир Владимирович — профессор, доктор технических наук, профессор кафедры электромеханики факультета мехатроники и автоматизации Новосибирского государственного технического университета.

Рецензенты:

Аносов В. Н. — доктор технических наук, профессор;

Востриков А. С. — доктор технических наук, профессор;

Кадомская К. П. — доктор технических наук, профессор;

Симаков Г. М. — доктор технических наук, профессор;

Щуров Н. И. — доктор технических наук, профессор.

Жуловян, В. В.

Ж87 Электрические машины: электромеханическое преобразование энергии : учеб. пособие для СПО / В. В. Жуловян. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 424 с. — Серия : Профессиональное образование.

ISBN 978-5-534-04293-1

Рассматривается круг вопросов, связанных с изучением процессов электромеханического преобразования энергии на основе общих законов физики, электродинамики и аналитической механики. Издание включает в себя основные соотношения и законы электромеханического преобразования энергии, уравнения движения электромеханических преобразователей энергии, вращающиеся многополюсные электромеханические преобразователи энергии, асинхронные и синхронные машины.

Соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования и профессиональным требованиям.

Для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования, обучающихся по электромеханическим специальностям, а также специальностям, связанным с эксплуатацией электрических машин.

УДК 621.314(075.32)

ББК 31.261я723



Все права защищены. Никакая часть данной книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме без письменного разрешения владельцев авторских прав. Правовую поддержку издательства обеспечивает юридическая компания «Дельфи».

ISBN 978-5-534-04293-1

© Жуловян В. В., 2014

© ООО «Издательство Юрайт», 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

Оглавление.....	5
Предисловие.....	7
Глава 1. Основные соотношения и законы электромеханического преобразования энергии.....	11
1.1. Пондеромоторная сила, испытываемая замкнутым током во внешнем магнитном поле. Потенциальная функция тока.....	12
1.2. Пондеромоторные силы взаимодействия токов.....	21
1.3. Электромеханическое преобразование энергии в поле переменных токов. Энергия магнитного поля.....	33
1.4. Определение пондеромоторных сил в магнитном поле при нелинейных связях между потокоцеплениями и токами.....	47
1.5. Пондеромоторные силы в электрическом поле.....	62
Выводы.....	68
Глава 2. Уравнения движения электромеханических преобразователей энергии.....	69
2.1. Представление уравнений движения на основе энергетических функций.....	70
2.2. Уравнения Лагранжа.....	82
2.3. Примеры на составление уравнений Лагранжа.....	96
2.4. Принцип наименьшего действия и уравнения Лагранжа.....	105
2.5. Вывод уравнений движения на основе функции Гамильтона.....	114
2.6. Истинные координаты и квазикоординаты.....	118
2.7. О единстве законов для механических и электрических систем.....	127
Задачи.....	153
Глава 3. Вращающиеся многополюсные электромеханические преобразователи энергии.....	181
3.1. Устройство вращающихся преобразователей энергии.....	182
3.1.1. Устройство коллекторных машин постоянного тока.....	182
3.1.2. Устройство и принцип действия многофазных электрических машин.....	187
3.2. Индуктивные (динамические) параметры машины.....	195
3.2.1. Устройство многофазных обмоток.....	196
3.2.2. Магнитное поле катушки.....	198
3.2.3. Магнитодвижущая сила, создаваемая группой катушек.....	201
3.2.4. Магнитодвижущая сила двухслойной обмотки.....	203
3.2.5. Магнитодвижущая сила многофазной обмотки.....	205
3.2.6. Приведение обмоток ротора к обмоткам статора.....	208
3.2.7. Индуктивности обмоток от основных полей.....	209
3.3. Результирующие векторы токов, потокоцеплений и напряжений.....	216



3.4. Уравнения движения электрической машины.....	224
3.5. Уравнения напряжений в векторной форме.....	228
3.6. Уравнения движения обобщенной электрической машины, выраженные через переменные в осях α , β и d , q	231
3.7. Баланс мощности, энергия магнитного поля, электромагнитный момент	238
3.7.1. Расчет электромагнитного момента на основе сил, опреде- ляемых законом Ампера	247
Глава 4. Асинхронные машины	253
4.1. Уравнения напряжений, токов, потокосцеплений. Схема замещения	254
4.2. Вращающий электромагнитный момент	263
4.3. Круговая диаграмма токов.....	272
4.4. Определение по круговой диаграмме основных величин, характе- ризующих работу асинхронного двигателя	279
4.5. Пусковой режим	283
4.6. Несимметричный режим работы асинхронных двигателей	288
4.6.1. Уравнения напряжений двухфазной асинхронной машины при несимметрии параметров и напряжений сети	290
4.6.2. Установившийся режим работы	295
4.6.3. Общий метод анализа m -фазных электрических машин с не- симметричными параметрами обмоток.....	305
Задачи	317
Глава 5. Синхронные машины	321
5.1. Устройство синхронных машин.....	322
5.2. Уравнения синхронной машины.....	323
5.3. Установившийся синхронный режим работы.....	331
5.4. Статическая устойчивость синхронной машины	355
5.5. Колебания и динамическая устойчивость синхронной машины	366
5.5.1. Синхронные индукторные машины	374
5.5.2. Синхронные индукторные двигатели с расщепленными обмотками	388
5.5.3. Электрическая схема обмоток. Токи, потокосцепления и ин- дуктивные параметры трехфазного индукторного двигателя.....	405
5.5.4. Уравнения напряжений машины и электромагнитного мо- мента.....	410
Выводы	419
Задачи	420
Библиографический список	424

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель, которую поставил автор настоящего учебника, – ознакомиться с анализом процессов электромеханического преобразования энергии: без излишнего усложнения, не впадая при этом в упрощение курса. Из существующих подходов к достижению поставленной цели предпочтение было отдано методам анализа, в основе которых лежит понятие энергии. В отличие от сил, создающих ее, энергия, запасенная в магнитных и электрических полях, и энергия, созданная движущимися телами и запасенная в упругих элементах, имеют идентичный вид от обобщенных координат и скоростей, характеризующих положение системы.

Энергетические функции, записанные в форме функций Лагранжа или функции Гамильтона, дают возможность составить дифференциальные уравнения движения системы и найти все силы, определяемые внутренними связями. При этом обращает на себя внимание то, что хотя и уравнения Лагранжа и канонические уравнения Гамильтона представляют другую форму закона Ньютона, где все силы выражены через энергетические функции, они полностью применимы и для анализа электрических систем, поведение которых описывается другими законами – законами Кирхгофа, а электрические и механические силы – законами электромагнитной индукции и силой Лоренца.

Такое положение говорит о внутреннем единстве законов движения механических и электрических систем. И его можно наблюдать более четко, если сопоставить с законом динамики обобщенный закон Ома, записанный для случая, когда наряду с приложенным напряжением в контуре действует индуцированная электродвижущая сила (ЭДС). Создаваемый ток ограничивается сопротивлением контура. Второй закон Ньютона записывается аналогичным образом, если из всех сил, действующих на материаль-

ную точку, выделить силу трения, всегда сопровождающую движение.

В такой форме записи два закона, сопровождаемые в первом случае законом Ленца, а во втором – принципом Даламбера, являются аналогами и по форме, и по физическому проявлению ЭДС и сил инерции. На этом основании в работе рассмотрена возможность составления уравнений движения для механических систем, используя независимость силовой функции от траектории перехода из начального в конечное положение. В результате устраняются затруднения, связанные с определением сил между материальными точками (и прежде всего их направления), составление уравнений движения становится аналогичным составлению уравнений для контурных токов или узловых напряжений. На аналогии законов Ньютона и Фарадея показано, что реактивную силу, обусловленную изменением массы, можно рассматривать как результат преобразования одного вида энергии в другой.

Таким образом, можно ожидать применимости для исследования электрических систем не только уравнений Лагранжа и Гамильтона, но и других методов, связанных с вариационными принципами механики.

В работе показано, что уравнения Лагранжа допускают непосредственное применение при введении квазикоординат, возникающих при анализе вращающихся электромеханических преобразователей энергии – электрических машин, что делает применение указанных уравнений более доступным, избегая громоздких преобразований, связанных с переходом к другой форме.

Основополагающая роль, отводимая функции энергии, обусловила и широкое внимание к ее выводу, демонстрации потенциальной природы энергии, запасенной в магнитном поле в условном пространстве, координатами которого являются токи или потокосцепления. Это обстоятельство дает возможность найти значение энергии, создаваемой несколькими контурами токов, электромагнитная связь которых происходит в электрически нелинейной среде.

Анализ вращающихся электромеханических преобразователей энергии проведен на основе результирующих пространственных векторов токов, потокосцеплений и напряжений. Эти обобщенные переменные отражают совместное действие фазных токов, образующих бегущее магнитное поле машины. Их введение уменьшает



число переменных, представляет процессы энергопреобразования более наглядно, позволяет провести координатные преобразования в компактной форме. Они играют роль, подобную обобщенным (независимым), которые были введены Лагранжем для анализа механических систем.

Особое внимание было уделено получению выражения электромагнитного момента. Оно было сделано различными способами – на основе энергетических функций, непосредственно через взаимодействие тока с магнитным полем на основе закона Ампера; дано его выражение через мгновенные скалярные величины и результирующие вектора. Показано, что при анализе установившегося режима работы его выражение найдется из баланса энергии, получаемого на основе уравнений напряжения. Такое внимание к электромагнитному моменту связано не только с тем, что эта величина определяет электромеханическое преобразование энергии, но, как показывает опыт, поиск выражения момента вызывает гораздо большие трудности, чем определение электродвижущей силы. Хотя, заметим, и ЭДС, и электромагнитный момент находятся из одной энергетической функции – функции Лагранжа или Гамильтона.

Для анализа работы асинхронных двигателей, имеющих несимметричные параметры обмоток, предложен подход, сущность которого связана с заменой действительных параметров на их составляющие. Такая процедура позволяет провести анализ работы с использованием результирующих векторов. Этот раздел работы будет полезен при изучении не только асинхронных двигателей, работающих от однофазной сети, когда для создания бегущего поля в цепь одной из фаз включаются фазосмещающие элементы, но и многофазных машин при несимметрии приложенного напряжения и электрических параметров.

В разделе синхронных машин для анализа их работы введено понятие электродвижущей силы, созданной результирующим магнитным потоком по продольной оси, который создается током возбуждения и гармоникой потока, вызванным явнополюсностью ротора. Такой подход позволяет представить синхронную машину как неявнополюсную машину, что значительно упрощает анализ, например, дает возможность аналитического поиска ЭДС возбуждения, обеспечивающей заданный режим работы вместо графического, который приводится во всех учебниках по электрическим машинам.



В последние годы синхронные двигатели все шире используются в приводах с частотно-токовым (трансвекторным) управлением, где с помощью аппаратных средств обеспечивается угол 90° между результирующими векторами токов статора и возбуждения, как это имеет место в двигателях постоянного тока. Показано, что достигаемые в этом случае хорошие регулировочные зависимости получаются за счет значительного ухудшения коэффициента мощности, так как двигатель работает в режиме недовозбуждения.

В заключение автор счел необходимым показать, что природа энергопреобразования в синхронных машинах, работающих на изменении проводимости воздушного зазора, основана на появлении гармоник магнитного поля, возникающих в результате амплитудно-пространственной модуляции магнитного поля. Они имеют полюсность обмоток, не равную числу зубцов ротора (!), и обеспечивают связь между неподвижными обмотками, зависящую от положения ротора. На этом принципе могут быть созданы все известные виды электрических машин – синхронные, асинхронные, двойного питания. Их отличительной чертой является то, что со скоростями МДС обмоток, определяемыми частотой протекающих в них токов, вращаются рабочие гармоники магнитного поля, тогда как скорость ротора будет другой, она определяется числом зубцов ротора.

Автор надеется, что настоящее пособие поможет раскрыть внутреннюю сущность подходов к анализу электромеханического преобразования энергии и будет полезным студентам сузуов и вузов, магистрантам, изучающим электромеханику, а также аспирантам и специалистам, работающим в этой области.

В результате изучения дисциплины студент должен освоить:

трудовые действия

- владеть методами расчета электрических машин, их рабочих и пусковых характеристик;

необходимые умения

- выбирать электрические машины для конкретных условий их применения;
- проводить испытания электрических машин;
- применять полученные теоретические знания для решения прикладных вопросов, связанных с работой по специальности;

необходимые знания

- принцип действия современных типов электрических машин; особенности их конструкции;
- уравнения, схемы замещения и характеристики.

Замечания и предложения по содержанию настоящего учебника, которые автор примет с благодарностью, направлять по адресу: 630092, Новосибирск, пр. К. Маркса, 20, Новосибирский государственный технический университет, издательство НГТУ.

ГЛАВА 1

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭНЕРГИИ

Преобразование электрической энергии в механическую (или обратный процесс) связано с двумя видами движения электрических зарядов в магнитном поле. С одной стороны, это движение зарядов (образующих электрический ток) вдоль контура тока, а с другой – движение самого контура тока в магнитном поле. То есть мы имеем дело с двумя видами мощностей – электрической и механической. Сила тока и, соответственно, мощность определяются приложенным напряжением и индуцированными электродвижущими силами, вызванными изменением магнитного потока, пронизывающего контур. Механические силы – силы взаимодействия тока контура с магнитным полем и сторонние силы неэлектрического происхождения, приложенные к контуру, совершают механическую работу. Связь между электрической и механической сторонами электромеханического преобразования энергии показана на рис. 1.1.

Сила тока и, соответственно, мощность определяются приложенным напряжением и индуцированными электродвижущими силами, вызванными изменением магнитного потока, пронизывающего контур. Механические силы – силы взаимодействия тока контура с магнитным полем и сторонние силы неэлектрического происхождения, приложенные к контуру, совершают механическую работу. Связь между электрической и механической сторонами электромеханического преобразования энергии показана на рис. 1.1.

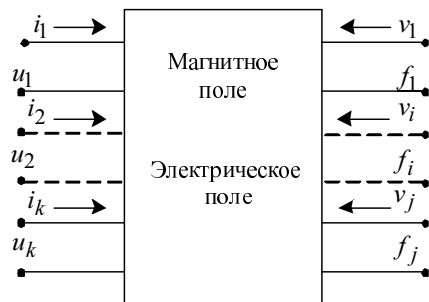


Рис. 1.1. Электромеханическая система (с вынесенными диссипативными элементами)

Мощность, подводимая к электрической стороне, определяется через напряжение на зажимах контуров U_k и ток контура $i_k = dQ_k/dt$, который представлен через скорость изменения заряда Q_k . Мощность, подводимая к условным зажимам на механической стороне,

выражается через приложенные силы F_i , действующие вдоль координаты q_i , и скорости $\dot{q}_i = dq_i / dt$:

$$P_K = \sum_{k=1}^{n=k} U_k i_k = \sum_{k=1}^{n=k} U_k \dot{Q}_k, \quad k = 1 \dots n,$$

$$P_M = \sum_{i=1}^{i=j} F_i \dot{q}_i, \quad i = 1 \dots j.$$

Здесь $i_k = dQ_k / dt = \dot{Q}_k$; $\dot{q}_i = dq_i / dt$.

В сумму сил, действующих вдоль координаты q_i , входит и пондеромоторная сила – механическая сила от взаимодействия тока с магнитным полем, которая является связующим звеном между электрической и механической энергиями. Как бы странно это ни показалось, но ее определение оказывается значительно сложнее, чем электродвижущих сил, связывающих механическую сторону с электрической. Именно этим объясняется то, что традиционно в соответствующих курсах по преобразованию энергии поиску пондеромоторной силы уделяется большее внимание.

Заметим, что аналогичным образом происходит преобразование энергии в электрическом поле. Однако наше внимание будет сосредоточено на электромеханическом преобразовании энергии, основанном на взаимодействии контуров с током. Причина заключается в низкой плотности энергии электрического поля, которая при современном уровне электротехнических материалов на несколько порядков ниже, чем в магнитном поле.

1.1. ПОНДЕРОМОТОРНАЯ СИЛА, ИСПЫТЫВАЕМАЯ ЗАМКНУТЫМ ТОКОМ ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ ТОКА

Важную роль в анализе процессов электромеханического преобразования энергии играет тот факт, что электрические и магнитные поля являются силовыми или потенциальными полями. Это свойство позволяет найти пондеромоторные силы¹, действующие

¹ Пондеромоторными силами называются механические силы, действующие на контур тока в магнитном поле или на заряд в электрическом поле.

на заряды или контуры токов через частные производные энергии, запасенной в электрических или магнитных полях, что, как правило, значительно проще непосредственного определения силы. Указанное преимущество особенно заметно при сложной конфигурации контуров токов, когда магнитные поля являются неоднородными в пространстве.

Для электрических полей потенциальная природа пондеромоторных сил обычно приводится в соответствующих курсах физики и электротехники. Заметим, что аналогия между силой Кулона и силой тяготения Ньютона уже предполагает потенциальную природу сил электрического поля.

Несколько иное положение с пондеромоторными силами магнитного поля, которые определяются как сумма сил, действующих на каждый элемент замкнутого контура, по которому протекает ток, т. е. поиск силы предполагает известным закон изменения индукции вдоль контура тока, а это зачастую представляет довольно сложную самостоятельную задачу. Однако благодаря тому, что природа сил магнитного поля является потенциальной, решение поставленной задачи удастся существенно упростить, сводя ее к поиску магнитного потока через контур тока, т. е. к задаче поиска электродвижущей силы.

Покажем это на примере поиска пондеромоторной силы, действующей на контур тока, помещенный в магнитное поле, которое создается внешним источником (рис. 1.2). Ограничимся случаем, когда ток контура можно считать линейным, т. е. сечение тока мало до рассматриваемых точек поля. Будем также считать, что магнитное поле и ток контура при перемещении последнего поддерживаются постоянными за счет источника питания.

Пондеромоторная сила, действующая на элемент длины контура $d\mathbf{l}$ контура тока $I d\mathbf{l}$, определяемая в соответствии с известным законом Ампера [1]

$$\mathbf{f}_m = I [d\mathbf{l} \times \mathbf{B}], \quad (1.1)$$

совершает работу при виртуальном перемещении последнего на $\delta \mathbf{q}$, определяемую скалярным произведением

$$\delta w = \delta \mathbf{q} \cdot \mathbf{f}_m = \delta \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{f}_{m1} + \delta \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{f}_{m2} + \dots \delta \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{f}_{mi},$$

где \mathbf{q}_i – независимая переменная, вдоль которой действует составляющая сила \mathbf{f}_{mi} .

Общую работу, связанную с перемещением всех элементов контура из положения L в положение L' (рис. 1.2), получим как интеграл по замкнутому контуру

$$\delta W_m = \oint_L \delta \mathbf{q} \cdot \mathbf{f}_m = I \oint_L \delta \mathbf{q} [d\mathbf{B}] = I \oint_L \mathbf{B} [\delta \mathbf{q} d\mathbf{l}].$$

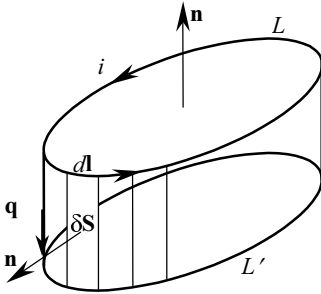


Рис. 1.2. К определению пондеромоторной силы

Возникший интеграл, определяющий совершаемую работу, представляет магнитный поток через боковую поверхность, описываемую при перемещении элементов контура на $\delta \mathbf{q}$ (это, напомним, малая величина). Порядок сомножителей, определяющих элемент боковой поверхности

$$\delta \mathbf{S} = [\delta \mathbf{q} d\mathbf{l}],$$

выбран таким, что направление вектора $\delta \mathbf{S}$ (т. е. направление нормали к $\delta \mathbf{S}$) образует с направлением тока праввинтовую систему (рис. 1.2). Таким образом, совершаемую работу можно записать в следующем виде:

$$\delta W_m = I \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = I \int_S B_n \delta S, \quad (1.2)$$

где интегрирование распространяется по всем элементам δS поверхности S , описанной контуром тока L при перемещении его точек на расстояние $\delta \mathbf{q}$ в положение L' , а B_n – нормальная составляющая индукции. Следовательно, интеграл в выражении работы представляет магнитный поток через боковую поверхность.

Непосредственный поиск возникшего интеграла представляет технически сложную задачу, связанную с расчетом картины магнитного поля, окружающего проводник. Однако его можно найти значительно проще, если воспользоваться условием непрерывности магнитного потока. Очевидно, что магнитный поток через боковую поверхность, описанную контуром тока при переходе из положения



L в L' , найдется как разность потоков Φ_L и $\Phi_{L'}$, проходящих через площади S_L и $S_{L'}$, которые опираются на контур тока L , например:

$$\Phi_L = \int_{S_L} B'_n dS_L,$$

где B'_n – нормальная составляющая индукции к поверхности dS_L , следовательно, магнитный поток через боковую поверхность будет равен

$$\delta\Phi_L = \Phi_L - \Phi_{L'} = \int_S B'_n \delta S,$$

и, таким образом, работа пондеромоторных сил оказывается равной

$$\delta W_m = I \delta\Phi_L, \quad (1.3)$$

т. е. она равна произведению тока на изменение (вариацию) магнитного потока через контур тока. Если при перемещении контура поток через него не изменяется, то работа этих сил равна нулю. При этом обратим внимание, что она, совершаемая работа, не зависит от траектории движения контура, а определяется только начальным и конечным положениями последнего.

Приведенное положение легко наблюдать, если вспомнить, что символ « δ » (вариация) по отношению к координатам ведет себя как полный дифференциал « d ». Поэтому если представить через некоторые обобщенные координаты q_i положение контура в магнитном поле, то в соответствии с приведенным замечанием можно представить

$$\delta\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial\Phi}{\partial q_j} \delta q_j \quad (1.4)$$

(здесь и далее индекс L будет опущен), тогда уравнение для работы (1.3) соответственно будет также полным дифференциалом:

$$\delta W_m = \frac{\partial W_m}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial W_m}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial W_m}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (1.5)$$

Интегрируя обе части уравнения (1.5) (вспоминая об аналогии символов « δ » и « d »), найдем, что работа, совершаемая пондеромоторными силами F_i при переходе контура из положения L_1 до положения L_2

$$W_m = \int_{M_1}^{M_2} (F_1 \delta q_1 + F_2 \delta q_2 + \dots F_i \delta q_i) = I \Phi, \quad (1.6)$$

определяется криволинейным интегралом, значение которого не зависит от пути перехода из положения L_1 до положения L_2 , так как подынтегральное выражение есть полный дифференциал функции W_m от перемещений q_i . Таким образом, сила, определяемая (1.6), является силой потенциальной природы, о чем говорит совершаемая этими силами работа.

Из уравнения (1.5) следует, что сила F_i , действующая вдоль координаты q_i , равна

$$F_i = \frac{\partial W_m}{\partial q_i}. \quad (1.7)$$

Заметим, что между механической пондеромоторной и электродвижущей силами существует тесная связь. Ее можно наблюдать из выражения механической работы, совершаемой силой F_i при перемещении контура вдоль координаты q_i :

$$dA = F_i dq_i.$$

С учетом (1.6) и (1.7) последнее уравнение с помощью очевидных операций приводится к виду

$$dA = \left(\frac{\partial W_m}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} \right) dt = I \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_i'} \frac{dq_i}{dt} \right) dt,$$

где выражение в скобках представляет ту часть электродвижущей силы, определяемой законом электромагнитной индукции, которая обусловлена перемещением контура. Это обстоятельство можно



наблюдать, если записать выражение для ЭДС в следующем виде и учесть, что токи в нашем случае поддерживаются постоянными:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial i_n} \frac{di_n}{dt}\right). \quad (1.8)$$

Таким образом, задача поиска силы оказывается частным случаем поиска ЭДС, что позволит в дальнейшем найти ее на основе уравнения напряжений.

В аналитической механике вместо величины W_m зачастую вводят функцию U , она равна

$$U = -W = -I\Phi \quad (1.9)$$

и называется потенциальной функцией или силовой.

В этом случае сила, действующая вдоль координаты q_i , будет

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad (1.10)$$

и так по каждой координате. Совершаемая ими работа будет представлена как убыль функции U :

$$U = -\int_{M_1}^{M_2} (F_1\delta q_1 + F_2\delta q_2 + \dots F_i\delta q_i) = -I\Phi. \quad (1.11)$$

Ее введение дает возможность представить работу потенциальных сил следующим образом. Пусть в начальном положении (для простоты анализа) контур тока располагается вне магнитного поля. Для его перемещения в рассматриваемую область поля необходимо затратить определенную работу, энергию, связанную с преодолением пондеромоторных сил. Если устранить внешние силы, контур тока под действием сил поля начнет перемещаться в область с меньшим значением энергии, т. е. совершаемая механическая работа будет равна убыли энергии контура; об этом говорит равенство (1.11).

Совершаемая механическая работа должна покрываться за счет энергии, потребляемой контуром тока от источника электрической

энергии. Соотношение между этими видами энергии рассмотрим для простейшего случая, когда движение контура определяется единственной координатой q , с которой связано изменение магнитного потока в пространстве, который создается постоянным током.

Механическая работа согласно (1.7) будет равна

$$dW_m = Fdq = \left(I \frac{\partial \Phi}{\partial q} \right) dq = Id\Phi(q).$$

При пренебрежении джоулевыми потерями потребляемую электрическую энергию W_e найдем из следующих уравнений, записанных на основании обобщенного закона Ома и закона электромагнитной индукции:

$$\begin{aligned} u + e &= 0; & e &= -d\Phi/dt, \\ dW_e &= uIdt = -eIdt = Id\Phi(q). \end{aligned}$$

Здесь dt – время, соответствующее перемещению dq .

Полученные результаты показывают, что механическая и электрическая энергии оказываются равными:

$$dW_m = dW_e$$

или

$$W_m = W_e = I\Phi.$$

Таким образом, мы наблюдаем, что полная энергия контура, совершаемая механической и электрической силами магнитного поля, при постоянстве тока равна нулю:

$$W_m + W_e = 0.$$

Этот же результат может быть найден и другим путем. Пондеромоторная сила, приложенная к единичной длине контура тока, имеющего скорость \mathbf{v} , совершает за время dt работу

$$dW_m = \mathbf{f} \mathbf{v} dt = [\mathbf{IB}] \mathbf{v} dt.$$

(Здесь и далее под током \mathbf{I} понимается вектор тока, совпадающий с элементом длины $d\mathbf{l}$.) Другой вид работы связан с движением заря-



дов (током) вдоль контура, которое происходит под действием сил Лоренца.

$$\mathbf{F} = q_e (\mathbf{E} + (\mathbf{v}'\mathbf{B})),$$

где скорость заряда \mathbf{v}' складывается из скорости элемента контура в пространстве \mathbf{v} и скорости движения заряда вдоль контура \mathbf{v}''

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{v}''.$$

Так как электрическое поле внутри проводника отсутствует ($\mathbf{E} = 0$), что является следствием принятого допущения об отсутствии джоулевых потерь, то совершаемая работа будет равна

$$\mathbf{F}\mathbf{v}'' = q_e ([\mathbf{v}\mathbf{B}] + [\mathbf{v}''\mathbf{B}])\mathbf{v}'' = q_e \mathbf{v}'\mathbf{E}'.$$

Здесь \mathbf{E}' – напряженность электродвижущей силы, индуцированной в проводнике при его движении

$$\mathbf{E}' = [\mathbf{v}\mathbf{B}],$$

под действием которой и происходит движение зарядов. Так как q_e – количество зарядов на единице длины, то, очевидно, произведение $q_e \mathbf{v}$ представляет ток контура

$$q_e \mathbf{v} = I,$$

и с учетом последних уравнений получим

$$dW_e = I [\mathbf{v}\mathbf{B}] dt = I \mathbf{E}' dt.$$

Следовательно, полная работа сил магнитного поля – механической и электрической – равна нулю:

$$\begin{aligned} dW_m + dW_e &= ([\mathbf{I}\mathbf{B}]\mathbf{v} + \mathbf{I}[\mathbf{v}\mathbf{B}])dq = \\ &= ([\mathbf{I}\mathbf{B}]\mathbf{v} + \mathbf{I}[\mathbf{v}\mathbf{B}])dt = 0, \end{aligned}$$

т. е. получился такой же результат, как и выше: работа пондеромоторных сил магнитного поля равна и противоположна по знаку работе электродвижущих сил. Это ожидаемый результат, который отвечает закону сохранения энергии, когда преобразование одного вида

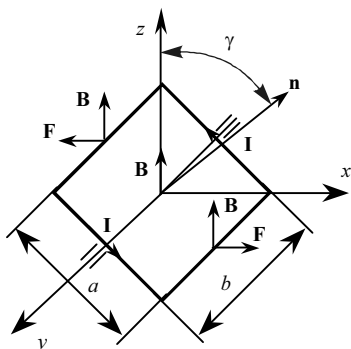


Рис. 1.3. Прямоугольный контур тока в однородном магнитном поле

энергии в другой происходит без потерь энергии – в нашем случае потерь электрических и потерь на трение.

Пример 1.1. Прямоугольный контур тока в однородном магнитном поле \mathbf{B} имеет возможность вращаться вокруг оси y (рис. 1.3). Найти момент, действующий на рамку с током I .

Решение. Энергия контура согласно (1.6)

$$W_m = I\Phi.$$

Магнитный поток Φ через контур есть функция обобщенной координаты γ (рис. 1.3), измеряемой между нормалью к плоскости рамки и направлением магнитного потока

$$W_m = I(abB)\cos\gamma = I\Phi\cos\gamma.$$

Обобщенная сила, действующая на контур тока, очевидно, представляет момент

$$M = \frac{\partial W_m}{\partial \gamma} = -I(abB)\sin\gamma,$$

который стремится повернуть контур в положение, когда с осью поля совпадает ось рамки $\gamma = 0$. Об этом говорит знак «-». Картина, возникающая при $\gamma = \pi$, будет соответствовать положению неустойчивого равновесия.

Аналогичное выражение для момента найдется и через значение электрической энергии, выделяемой в контуре. Ее значение при пренебрежении джоулевыми потерями может быть выражено, как было показано выше, через значение электродвижущей силы, индуктируемой в контуре. Так как токи, протекающие в рамке, и внешний магнитный поток по условиям задачи являются постоянными, то в результате следующих преобразований получим

$$uI = -eI = I \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} = \frac{\partial(I\Phi)}{\partial \gamma} \frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial W_m}{\partial \gamma} \frac{d\gamma}{dt} = M\dot{\gamma}.$$



Откуда видно, что момент может быть найден через значение электродвижущей силы. Такое положение объясняется следующим образом. При движении проводника в магнитном поле в нем под действием силы Лоренца создается электрический ток, который, в свою очередь, взаимодействуя с магнитным полем, создает пондеромоторную силу, работа которой на перемещение контура равна работе, совершенной силами Лоренца на движение зарядов вдоль контура, о чем говорилось выше. Такое положение является следствием закона электромагнитной индукции, связывающего две стороны электромеханического преобразования энергии. Как будет показано ниже, такой подход остается справедливым и для случая переменных токов, если в приведенных выражениях для силы подставлять мгновенные значения токов.

1.2. ПОНДЕРОМОТОРНЫЕ СИЛЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТОКОВ

В предыдущем параграфе по существу дано решение поставленной задачи: внешнее магнитное поле, в котором находился контур с током, создавалось другим контуром тока, размеры которого настолько велики, что влияние рассматриваемого контура тока на него попросту пренебрегалось. Вместе с тем очевидно, что пондеромоторные силы, действующие на контуры токов в соответствии с третьим законом Ньютона должны быть равны. Исходя из этого положения, мы вправе записать, что силы действия первого контура на второй F_{12} , а второго на первый F_{21} связаны условием

$$F_{12} = F_{21}.$$

Эти силы определяются выражением (1.6)

$$F_{12} = \frac{\partial W_{12}}{\partial q}, \quad F_{21} = \frac{\partial W_{21}}{\partial q},$$

где запасенная энергия для каждого контура согласно (1.5)

$$W'_{12} = I_1 \Phi_{12}, \quad W'_{21} = I_2 \Phi_{21}$$

определяется потоками взаимоиндукции, т. е. Φ_{12} – это магнитный поток, созданный током I_2 , пронизывает первый контур; соот-

ветственно, Φ_{21} – магнитный поток от тока I_1 , пронизывает второй контур тока.

Для дальнейшего анализа удобно представить выражение для запасенной энергии через потокосцепления

$$\Psi_{12} = \Phi_{12}w_1, \quad \Psi_{21} = \Phi_{21}w_2,$$

а токи контуров I_n – через число витков контура w_n и ток витка i_n

$$I_1 = w_1i_1, \quad I_2 = w_2i_2.$$

Потокосцепления Ψ_{12} и Ψ_{21} (полагая систему линейной) представим через коэффициенты взаимоиנדукции L_{12} и L_{21} , которые являются функциями пространственных координат q_i :

$$\Psi_{12} = L_{12}i_1, \quad \Psi_{21} = L_{21}i_2. \quad (1.12)$$

С учетом введенных обозначений уравнение для сил запишется

$$\frac{\partial}{\partial q_i}(i_1i_2L_{12}) = \frac{\partial}{\partial q_i}(i_1i_2L_{21}), \quad (1.13)$$

откуда следует, что коэффициенты взаимоиנדукции должны быть равны

$$L_{12} = L_{21} = L_n,$$

и это условие справедливо для любой пары контуров

$$L_{kn} = L_{nk} \quad (n \neq k). \quad (1.14)$$

Заметим, условие равенства коэффициентов взаимоиנדукции должно выполняться независимо от состояния магнитной системы – линейна она или нелинейна. Это является следствием третьего закона Ньютона и может служить одним из критериев правильности расчета магнитной системы.

Таким образом, из условия равенства сил вытекает, что энергии от токов W'_{12} и W'_{21} будут равными и, в свою очередь, равны запасенной энергии W_m :

$$W'_{12} = W'_{21} = L_{12}i_1i_2 = L_{21}i_1i_2 = W_m,$$

т. е. вклад тока каждого контура в создание энергии W_m является одинаковым. С учетом отмеченного обстоятельства, для дальней-

шего анализа удобно представить энергии контуров W_{12} и W_{21} , связанные условием

$$W_{12} = W_{21} = W_m/2 \quad (1.15)$$

и определяемые выражениями

$$W_{12} = \frac{1}{2} i_1 \Psi_{12}, \quad W_{21} = \frac{1}{2} i_2 \Psi_{21}. \quad (1.16)$$

Тогда полная энергия W_m электромагнитно связанных контуров выразится следующим уравнением:

$$W_m = \frac{1}{2} (i_1 \Psi_{12} + i_2 \Psi_{21}). \quad (1.17)$$

Подобная симметричная форма запасенной энергии используется при записи энергии от сил взаимодействия заряженных частиц [1]. Помимо удобной формы, которая легко обобщается на произвольное число пар контуров, она, как будет показано ниже, может быть обобщена и на случай, когда наряду с потокоцеплением взаимоиндукции контур пронизывается и собственным потокоцеплением.

На рис. 1.4 приведена геометрическая интерпретация составляющих запасенной энергии W_{12} и W_{21} , определяемых по формуле (1.17). Они всегда равны, и это условие должно выполняться как для линейных, так и для нелинейных связей между токами и потокоцеплениями.

Действие пондеромоторных сил можно наблюдать на простейшей электромеханической системе, приведенной на рис. 1.5.

Здесь контуры токов на статоре AA' и роторе aa' расположены в пазах сердечников 1 и 2, выполненных из электротехнической стали, обладающей высокой магнитной проницаемостью, много больше проницаемости воздуха: $\mu_{ст} \gg \mu_0$. Для поворота ротора в магнитном поле статора на угол $\pm\gamma$ необходимо преодолеть сопротивление пондеромоторных сил (рис. 1.5), направление которых определяется известными способами, например правилом левой руки. Это мнемоническое правило выражает результат векторного умножения векторов. Если внешние силы удалить, то ротор начнет поворачиваться в исходное положение за счет накопленной энергии, равной площади прямоугольника $OD_1A_1B_1$ либо $OD_2A_2B_2$ (рис. 1.4):

$$S(OD_1A_1B_1) = S(OD_2A_2B_2) = W_m.$$

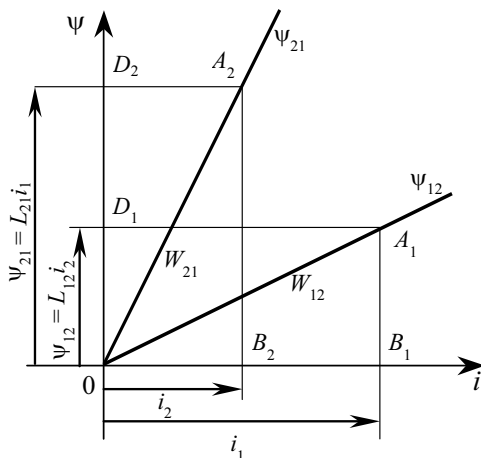


Рис. 1.4. К представлению запасенной энергии от полей взаимоиндукции при фиксированном положении контуров ($q = \text{const}$)

Помимо потоков взаимоиндукции каждый контур пронизывается и собственным потокосцеплением. Их среднее значение определяется как

$$\psi_{11} = L_{11}i_1, \quad \psi_{22} = L_{22}i_2, \quad (1.18)$$

где L_{mn} – собственные индуктивности контуров, которые в общем случае являются функциями координат q_i и магнитного состояния системы.

Энергию, сосредоточенную в собственном магнитном поле, можно найти на основе уравнения (1.16), если вместо потока взаимоиндукции подставить собственные потокосцепления ψ_{11} (ψ_{mn}), тогда с учетом (1.18) получим

$$W_{11} = \frac{1}{2}\psi_{11}i_1 = \frac{1}{2}L_{11}i_1^2, \quad W_{22} = \frac{1}{2}\psi_{22}i_2 = \frac{1}{2}L_{22}i_2^2. \quad (1.19)$$

Такие же выражения для энергии получатся и на основе следующих рассуждений. Представим ток контура в виде совокупности нитей тока dL , которые пронизываются магнитным потоком Φ , созданным током контура I . Энергия, создаваемая от взаимодействия нити тока с потоком, найдется согласно (1.7):

$$dW_{11} = \Phi_{11}(I_1)dI_1,$$

а энергия от всех нитей тока

$$W_{11} = \frac{1}{2} \int_0^I \Phi_{11} dI_1,$$

где множитель $\frac{1}{2}$ введен потому, что при интегрировании взаимодействие нитей тока учитывается дважды – как собственно тока dI с магнитным потоком, создаваемого этим же током, и наоборот. Если принять в качестве среднего магнитного потока, пронизывающего контуры нитей тока

$$\Phi(I_1) = \Phi_{11},$$

то получим следующее выражение для собственной энергии:

$$W_{11} = \frac{1}{2} \Phi_{11} I_1 = \frac{1}{2} \Phi_{11} w_1 i_1 = \frac{1}{2} \Psi_{11} i_1, \quad (1.20)$$

которое полностью совпадает с ранее полученными выражениями (1.16).

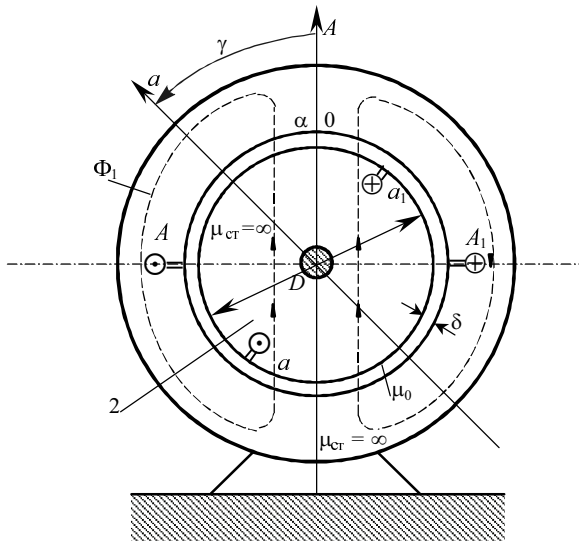


Рис. 1.5. Электромеханическая система с контурами токов на статоре AA_1 и роторе aa_1 :

1 – статор; 2 – ротор

Аналогичным образом найдется и собственная энергия, созданная током второго контура:

$$W_{22} = \frac{1}{2} \Psi_{22} i_2. \quad (1.21)$$

Другое доказательство справедливости полученных выражений будет сделано ниже, здесь же приведем полное выражение для запасенной энергии, создаваемой парой контуров тока:

$$W_m = W_{11} + W_{12} + W_{21} + W_{22},$$

которое с учетом (1.17) и (1.20) приводится к виду

$$W_m = \frac{1}{2} (\Psi_1 i_1 + \Psi_2 i_2), \quad (1.22)$$

где потокосцепления Ψ_1 и Ψ_2

$$\Psi_1 = \Psi_{11} + \Psi_{12} = L_{11} i_1 + L_{12} i_2, \quad (1.23)$$

$$\Psi_2 = \Psi_{21} + \Psi_{22} = L_{21} i_1 + L_{22} i_2$$

представляют полные потокосцепления контуров – свое и стороннее.

Выражение для энергии (1.22) легко обобщается на произвольное число контуров и приводится к следующим формам, используя (1.23):

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} \Psi_k i_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^k \sum_{n=1}^k L_{kn} i_n i_k, \quad (1.24)$$

где потокосцепление контура

$$\Psi_n = L_{n1} i_1 + L_{n2} i_2 + L_{nn} i_n + \dots L_{nk} i_k,$$

а взаимные индуктивности подчиняются условию

$$L_{nk} = L_{kn}, \quad n \neq k.$$

Теперь, после того как получены выражения для полной энергии, можно найти электромагнитную силу, действующую на некоторый контур тока. Ее значение вдоль некоторой пространственной

координаты q_i найдем на основе уравнения для силы (1.7), если в последнем выражении в качестве энергии использовать полную энергию системы (1.18):

$$F_{mi} = \frac{\partial W_m}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\frac{1}{2} \sum_{n=1}^k \Psi_n i_n \right]. \quad (1.25)$$

При этом заметим, что электромагнитная сила, определяемая последним выражением, является равнодействующей всех сил, действующих на элементы длины контура тока в рассматриваемом направлении. И если перемещение контура тока не связано с изменением потокосцеплений $\Psi_n(q_i)$ (или соответствующих индуктивностей), то эта сила будет равна нулю, несмотря на существование элементарных сил.

Покажем справедливость выражения для определения запасенной энергии от взаимодействия тока с собственным потокосцеплением (1.20) на примере, приведенном на рис. 1.5. Здесь представлена электромеханическая система, где контуры токов AA_1 и aa_1 лежат на ферромагнитных поверхностях статора и ротора. Так как обычно значение воздушного зазора δ много меньше расстояния между сторонами контура $\tau = \pi D/2$, т. е. $\tau \gg \delta$, картину поля, создаваемого контуром токов, удобнее рассматривать в декартовой системе координат. Полагая, что мы имеем дело с линейными токами, при некоторых допущениях на основании закона полного тока нетрудно установить закон изменения магнитного поля, создаваемого контуром тока AA' вдоль окружности воздушного зазора – он носит прямоугольный характер (рис. 1.6) с амплитудой

$$B_{11} = \mu_0 H_{11} = \frac{\mu_0}{\delta} \frac{i_1 w_1}{2},$$

а создаваемое потокосцепление

$$\Psi_{11} = \Phi_{11} w_1 = B_{11} \tau l w_1 = \frac{\mu_0}{\delta} \frac{w_1^2}{2} \tau l i_1 = L_{11} i_1,$$

здесь l – длина стороны контура AA' вдоль координаты y .

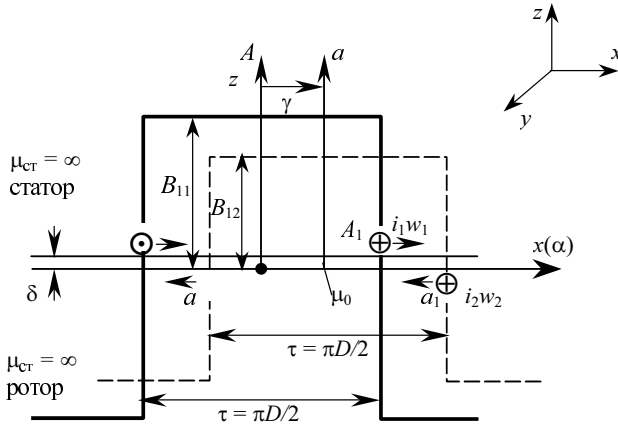


Рис. 1.6. К образованию пондеромоторных сил от взаимодействия токов с потоками взаимной индукции: стрелками указаны направления сил

Энергия, запасенная в объеме воздушного зазора,

$$W_{11} = \frac{1}{2} \int_V B_{11} H_{11} dV = \frac{1}{2} \int_V \mu_0 H_{11}^2 dV,$$

где dV – элемент объема, $dV = dx dy dz$.

Подставляя значение напряженности H_{11} и интегрируя по каждой переменной в пределах

$$0 < z < \delta; \quad 0 < y < l; \quad \tau/2 < x < 3\tau/2,$$

получим

$$W_{11} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{\delta} \frac{w_1^2}{2} \tau l i_1^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0}{\delta} \frac{w_1^2}{2} \tau l \right) i_1^2.$$

Выражение в скобках, как нетрудно видеть, представляет собственную индуктивность контура L_{11} и, следовательно, последнее выражение может быть представлено в виде

$$W_{11} = \frac{1}{2} L_{11} i_1^2 = \frac{1}{2} \Psi_{11} i_1.$$

Полученный результат идентичен (1.16), хотя и найден совершенно другим образом.

Аналогичным образом получится энергия и для второго контура, созданная полным током $i_2 w_2$:

$$W_{22} = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0}{\delta} \frac{w_{22}^2}{2} \tau l \right) i_2^2 = \frac{1}{2} \Psi_{22} i_2^2.$$

Заметим, что такое же выражение для энергии получится и на основе следующего уравнения, полученного на основании закона сохранения энергии, например для W_{11} :

$$W_{11} = \int^{\Psi_i} i_1 d\Psi_{11}.$$

Выражая дифференциал $d\Psi_{11}$

$$d\Psi_{11} = \frac{\partial \Psi_{11}}{\partial i_1} di_1 = L_{11} di_1$$

и вводя его в интеграл энергии, найдем

$$W_{11} = \frac{1}{2} L_{11} i_1^2 = \frac{1}{2} \Psi_{11} i_1^2.$$

Таким же образом найдется W_{22}, \dots и т. д.

На рис. 1.7 представлена энергия от собственного потокосцепления в соответствии с (1.19), которое определяется аналогично энергии от потокосцепления взаимоиндукции (рис. 1.4). Забегая вперед, заметим, что энергию, определяемую площадью OAB , называют коэнергией, а OCB – энергией магнитного поля. Они будут различными при нелинейной зависимости потокосцепления от тока.

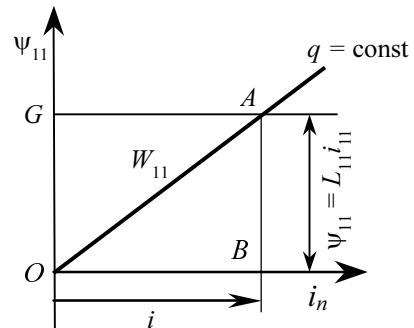


Рис. 1.7. Запасенная энергия W_{11} , созданная собственным магнитным полем

Возникновение пондеромоторных сил от взаимодействия тока с собственным потокосцеплением покажем на примере электро-механической системы (рис. 1.8). Здесь контур тока представляет группу катушек, расположенных в пазах сердечника статора. Последний, как и сердечник ротора, выполнен из электротехнической стали – материала, имеющего высокую магнитную проницаемость: $\mu_{ст} \gg \mu_0$.

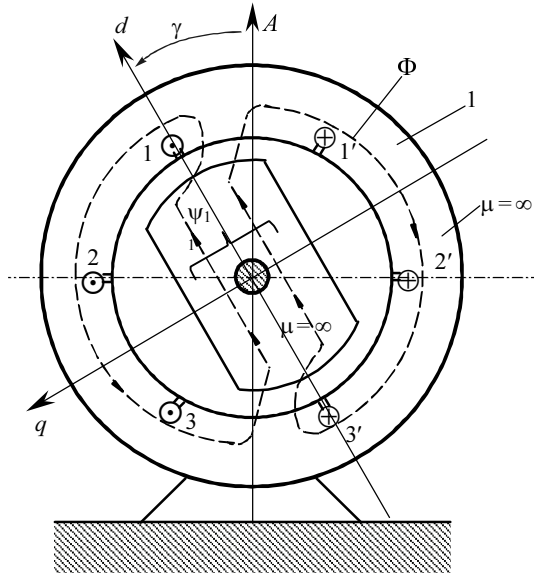


Рис. 1.8. Электромеханическая система с магнитной несимметрией по осям d, q

Благодаря магнитной асимметрии ротора по осям d и q происходит деформация магнитного потока, создаваемого контуром тока, и возникают условия для создания результирующей пондеромоторной силы, действующей на ротор. Чтобы наблюдать влияние зубчатости ротора, на рис. 1.9 в декартовой системе координат приведена картина поля $B_{11}(\alpha)$, которая создавалась бы при «гладком» роторе. Хотя в этом случае существуют силы, действующие на каждый проводник с током, они уравновешивают друг друга, и результирующая сила будет равна нулю. При наличии зубчатости ротора такая же картина распределения сил будет только в двух случаях, когда с магнитной осью совпадает либо продольная d , либо поперечная q оси (рис. 1.9, a и b). В промежуточных положениях

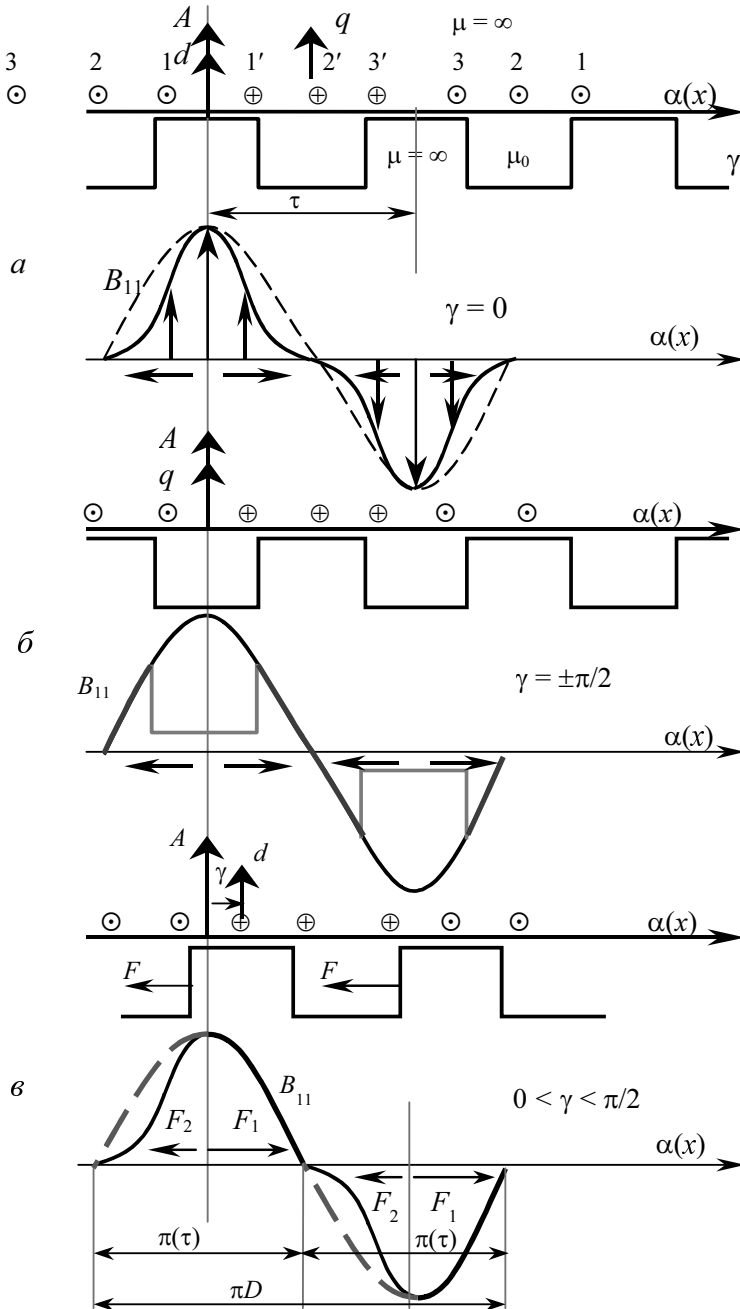


Рис. 1.9. К механизму образования пондеромоторных сил от взаимодействия тока с собственным потокоосцеплением

симметрия магнитного поля нарушается (рис. 1.9, б), силы, действующие на проводники, не уравниваются, не компенсируются. Возникающая результирующая сила и создаваемые моменты на статор и ротор действуют в противоположных направлениях. Нетрудно установить, что под их действием ротор стремится занять положение, когда с магнитной осью контура совпадает продольная ось ротора независимо от ее направления. То есть положение устойчивого равновесия достигается при $\gamma = 0, \pi, 2\pi, \dots$

Значение пондеромоторной силы в рассматриваемом случае наиболее просто найти через запасенную энергию (1.19):

$$W_{11} = \frac{1}{2} \psi_{11} i_1 = \frac{1}{2} L_{11}(\gamma) i_1^2.$$

Собственная индуктивность контура $L_{11}(\gamma)$ является функцией углового положения ротора и может быть представлена в следующем виде:

$$L_{11}(\gamma) = l_0 + l_2 \cos 2\gamma.$$

Создаваемый момент найдется на основе (1.6), и, так как $dx = R d\gamma$,

$$M_{11} = F_{11} R = \frac{\partial W_m}{\partial \gamma} = -i^2 l_2 \sin 2\gamma$$

является результатом взаимодействия токов контура с собственным потокоцеплением. Возникающий момент стремится уменьшить угол рассогласования γ , т. е. $\gamma = 0$ есть точка устойчивого равновесия. И заметим, что хотя на роторе нет источников магнитного поля, возникающий момент действует на ротор, поворот которого определяет изменение потокоцепления, создаваемого токами контуров, расположенных на статоре.

Электромеханические преобразователи, работающие на силе взаимодействия с собственным потокоцеплением, широко используются на практике. Характерный вид устройства приведен на рис. 1.10. Оно состоит из ферромагнитного сердечника 1, на котором размещается контур тока 2, и подвижного сердечника 3. При протекании тока в катушке 2 ферромагнитный якорь 3 притянется

к неподвижному сердечнику, преодолевая силу упругости пружины 4 и совершая полезную работу. Простота устройств обусловила их массовое применение в различных электрических аппаратах.

Значение пондеромоторной силы, действующей на якорь, найдется в соответствии с общим выражением (1.7):

$$F = \frac{\partial W_m}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \psi(x) i \right) = \frac{1}{2} \left[i^2 \frac{\partial L(x)}{\partial x} \right].$$

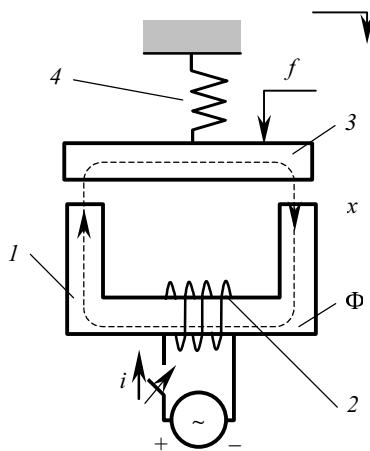


Рис. 1.10. Преобразователь энергии с одним контуром тока

1.3. ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЭНЕРГИИ В ПОЛЕ ПЕРЕМЕННЫХ ТОКОВ. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Ранее мы рассматривали пондеромоторные силы, возникающие между контурами постоянных токов. Они вместе с другими внешними силами определяют движение контуров в соответствии со вторым законом Ньютона. Но это только одна сторона процесса электромеханического преобразования энергии. Движение контуров приведет к появлению электродвижущих сил (ЭДС), которые возникнут вследствие изменения потокосцеплений, пронизывающих контур:

$$e_k = - \frac{d\psi_k}{dt}. \quad (1.26)$$

Их появление вызовет приток энергии, часть которой преобразуется в механическую энергию. Существование такой связи было показано в §1.1, однако это было сделано для постоянных токов, что существенно ограничивает полученные результаты – электромеханическое преобразование энергии происходит только в поле переменных токов.

Механизм электромеханического преобразования энергии рассмотрим на примере двух электромагнитно связанных контуров. Уравнения напряжений для каждого из них имеют вид

$$\begin{aligned} u_1(t) &= i_1 R_1 + \frac{d\psi_1}{dt}, \\ u_2(t) &= i_2 R_2 + \frac{d\psi_2}{dt}, \end{aligned} \quad (1.27)$$

где $u_k(t)$ – напряжения, приложенные к зажимам контуров, $\psi_k(t)$ – потокосцепления контуров, являющиеся функциями токов $i_k(t)$ и пространственных координат $q_i(t)$. Настоящие уравнения составлены на основе обобщенного закона Ома [1].

$$u_k(t) + e_k(t) = i_k R_k, \quad (1.28)$$

где $e_k(t)$ – индуцированная ЭДС, которая наряду с приложенным напряжением определяет ток i_k контура, имеющего сопротивление R_k .

Как было показано выше, для рассматриваемого случая потокосцепления задаются уравнениями (1.23):

$$\begin{aligned} \psi_1 &= L_{11}i_1 + L_{12}i_2, \\ \psi_2 &= L_{21}i_1 + L_{22}i_2. \end{aligned}$$

Здесь, напомним, собственные L_{kk} и взаимные L_{kn} индуктивности являются функциями обобщенных пространственных координат q_1, q_2, \dots, q_i , определяющих взаимное положение контуров в пространстве (их зависимость от состояния магнитной системы на данном этапе не рассматривается). С учетом приведенных выражений для потокосцеплений ψ_k найдем ЭДС контуров. При этом будем полагать, что перемещение в пространстве происходит только по одной координате q , в то время как остальные координаты q_k поддерживаются постоянными – виртуальное перемещение. Тогда согласно общему выражению для ЭДС (1.26) найдем

$$-e_1 = \frac{d\psi_1}{dt} = L_{11} \frac{di_1}{dt} + i_1 \frac{dL_{11}}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} + i_2 \frac{dL_{12}}{dt},$$



$$-e_2 = \frac{d\psi_2}{dt} = L_{21} \frac{di_1}{dt} + i_1 \frac{dL_{21}}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt} + i_2 \frac{dL_{22}}{dt}. \quad (1.29)$$

Слагаемые ЭДС, зависящие от скорости изменения токов, называются трансформаторными. Такое определение связано с тем, что на их основе работают статические аппараты с неподвижными обмотками, служащие для преобразования электрической энергии одного напряжения в другое. Такие аппараты называются трансформаторами.

Электродвижущие силы, вызванные изменением индуктивностей при движении контура, например вдоль q_i координаты, называют ЭДС движения. Они определяются скоростью движения контура (или элемента контура) $dq/dt = \dot{q}$, что можно наблюдать, если ее значение записать в следующем виде (индексы при токе и индуктивности опущены):

$$i \frac{dL}{dt} = -i \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} = -i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i.$$

Природа возникновения ЭДС движения связана с силой Лоренца, действующей на заряды в проводнике, движущемся в магнитном поле. Они, как было показано выше, определяют механические силы, действующие на контур тока в магнитном поле. Возникновение трансформаторной ЭДС не так очевидно – она существует и должна восприниматься как отражение объективной реальности.

Знак «минус» перед ЭДС (1.26), введенный Ленцем, указывает, что она препятствует изменению магнитного потока. То есть индуцированная ЭДС ведет себя аналогично силе инерции в законе Ньютона, которая стремится удержать тело в состоянии покоя или равномерного движения. Таким образом, закон электромагнитной индукции Фарадея с правилом Ленца аналогичен закону Ньютона с принципом Даламбера.

Рассмотрим теперь энергетические соотношения. Умножим левую и правую части уравнений напряжений (1.27) на токи контуров и сложим их:

$$u_1 i_1 + u_2 i_2 = (i_1^2 R_1 + i_2^2 R_2) + \left(i_1 \frac{d\psi_1}{dt} + i_2 \frac{d\psi_2}{dt} \right). \quad (1.30)$$

Левая часть возникшего уравнения представляет мощность, поступающую на зажимы контуров (их знаки ставятся в соответствии с положениями, принятыми в теории цепей). Первые два слагаемых правой части определяют мощность, выделяемую на сопротивлениях контуров в виде тепла (джоулевы потери).

Природу двух последних слагаемых, обусловленных возникновением электродвижущих сил, рассмотрим следующим образом. Подставим в (1.30) потокосцепления ψ_1 и ψ_2 (1.23) и в итоге, обозначая $L_{12} = L_{21} = L_m$, получим

$$\begin{aligned}
 i_1 \frac{d\psi_1}{dt} + i_2 \frac{d\psi_2}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_{11} i_1^2 + L_m i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_{22} i_2^2 \right) + \\
 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_{11} i_1^2 + L_m i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_{22} i_2^2 \right) \Big|_I.
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

Учитывая, что выражение в скобках представляет запасенную энергию W_m , приведенное уравнение, обобщенное на произвольное число контуров, запишется как

$$\sum_{k=1}^n i_k \frac{d\psi_k}{dt} = \frac{dW_m}{dt} + \frac{dW_m}{dt} \Big|_I, \tag{1.32}$$

где

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^n \sum_{k=1}^n L_{kn} i_k i_n,$$

известная нам из § 1.2 как энергия магнитного поля, полученная при постоянной силе тока в контурах (1.20).

Индекс I у второго слагаемого в уравнениях (1.31) и (1.32) означает, что дифференцирование функции W_m производится при постоянстве силы токов, т. е. она представляет частную производную W_m по перемещению q_i :

$$\frac{dW_m}{dt} \Big|_I = \sum_{i=1}^j \frac{\partial W_m}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} = \sum_{i=1}^j F_i \dot{q}_i. \tag{1.33}$$



Форма записи частной производной по энергии, принятая при выводе уравнения (1.32), сделана по соображениям лучшей наглядности. Как видно из (1.33), это слагаемое представляет ту часть поступающей электрической мощности, которая преобразуется в механическую мощность под действием пондеромоторных сил:

$$F_i = \left. \frac{\partial W_m}{\partial q_i} = \frac{dW_m}{dq_i} \right|_I. \quad (1.34)$$

Она определяется так же, как и для случая постоянных токов, только мгновенными значениями токов. Причины этого явления мы коснемся ниже. Здесь же укажем, что мощность (1.33) называют также электромагнитной мощностью $P_{эм}$, а силы (1.34) – электромагнитными силами $F_{эм}(i)$. Заметим, когда подводимая электрическая мощность преобразуется в механическую, мы имеем двигательный режим; обратный процесс будет соответствовать генераторному режиму.

В соответствии с теорией цепей в первом случае мощность на зажимах будет положительной, во втором – отрицательной.

Рассмотрим подробнее составляющие мощности, связанные со скоростью изменения энергии, запасенной в магнитном поле. Ее вид, обобщенный на произвольное число контуров k :

$$\frac{dW_m}{dt} = \sum_{k=1}^{m=k} \frac{\partial W_m}{\partial i_k} \frac{di_k}{dt} + \sum_{i=1}^{i=j} \frac{\partial W_m}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt}. \quad (1.35)$$

Эта мощность обусловлена индуцированными электродвижущими силами. Здесь первое слагаемое показывает мощность, связанную с движением зарядов (током) по контуру, а второе слагаемое представляет мощность, связанную с движением контура в магнитном поле, созданном токами контуров, в том числе и собственным током. Как видно, оно равно механической мощности, совершаемой пондеромоторными силами, т. е. электромагнитной мощности. Такое положение становится основанием для ряда авторов принимать за механическую мощность удвоенное ее значение и, соответственно, силы (1.34). Но это неверно, если учесть, что это выражение для силы было получено на основе силы Ампера (см. §1.1). Как мы увидим в дальнейшем, в многофазных электро-

механических преобразователях энергии при определенных условиях, соответствующих установившемуся режиму работы, оказывается, что $dW_m/dt = 0$, причем достигается, когда ни одно из слагаемых этого выражения не равно нулю. То есть оказывается, что в этом режиме они равны и противоположны по знаку:

$$\sum_{k=1}^{m=k} \frac{\partial W_m}{\partial i_k} \frac{di_k}{dt} = - \sum_{i=1}^{i=j} \frac{\partial W_m}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} \neq 0. \quad (1.36)$$

Другое замечание связано с природой этих слагаемых, для чего удобней перейти от производных к дифференциалам, т. е. к энергии, выделяемой за бесконечно малое время, для этого умножим (1.35) на dt . В результате получим

$$dW_m = \sum_{k=1}^n \frac{\partial W_m}{\partial i_k} di_k + \sum_{i=1}^j \frac{\partial W_m}{\partial q_i} dq_i. \quad (1.37)$$

Здесь первое слагаемое в правой части можно представить как полный дифференциал энергии в пространстве токов i_k , тогда как второе слагаемое – как полный дифференциал энергии в пространстве координат q_i . Они представляют работу от изменения запасенной энергии в указанных системах координат. Если учесть, что

$$\frac{\partial W_m}{\partial i_k} = \psi_k; \quad \frac{\partial W_m}{\partial q_i} = F_i$$

являются силами в указанных пространствах, тогда каждый из этих дифференциалов запишется как

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial W_m}{\partial i_k} di_k = \sum_{k=1}^n \psi_k di_k \quad (\text{при } q_i = \text{const}),$$

$$\sum_{i=1}^j \frac{\partial W_m}{\partial q_i} dq_i = \sum_{i=1}^j F_i dq_i \quad (\text{при } i_k = \text{const}).$$

Следовательно, выражение для запасенной энергии может быть найдено не только через работу пондеромоторных сил F_i , но также



и через работу в пространстве токов i_k , где роль сил играют потоко-
сцепления ψ_k , т. е.

$$W_m = \int_0^{i_1, \dots, i_n} \sum_{k=1}^n \frac{\partial W_m}{\partial i_k} di_k = \int_0^{i_1, \dots, i_n} \sum_{k=1}^n \psi_k di_k, \quad (1.38)$$

$$W_m = \int_0^{q_1, \dots, q_n} \sum_{k=1}^n \frac{\partial W_m}{\partial q_i} dq_i = \int_0^{q_1, \dots, q_n} \sum_{k=1}^n F_i dq_i. \quad (1.39)$$

Хотя представленные выражения для поиска запасенной энергии равнозначны, однако ее определение на основе (1.38) значительно проще, что можно было наблюдать, сравнивая с выводами, приведенными в §1.2. Использованное там выражение для энергии от собственного потоко-сцепления легко найдется с помощью приведенного выражения. Энергию, созданную произвольным числом контуров, найдем, подставляя в него потоко-сцепление ψ_k (1.23), обобщенное на произвольное число контуров. Интегрируя и полагая нулевыми начальные условия, получим известное нам выражение

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^n \sum_{k=1}^{n=k} L_{kn} i_k i_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n=k} \psi_k i_k.$$

О возможности найти выражение энергии в пространстве токов, где в роли силы выступают потоко-сцепления, указывалось в § 1.2.

Приведем и другие способы получения энергии W_m . Исходным является уравнение (1.30), полученное на основе сохранения энергии:

$$\int_0^t \left(\sum_{k=1}^{k=2} u_k i_k - i_k^2 R_k \right) dt = \int \psi_1 i_1 d\psi_1 + \int \psi_2 i_2 d\psi_2.$$

Как было показано выше, запасенная энергия W_m может быть найдена при фиксированных пространственных координатах $q_i = \text{const}$ (1.38):

$$\int^{\psi_1} i_1 d\psi_1 + \int^{\psi_2} i_2 d\psi_2 = dW_m. \quad (1.40)$$

Выразим дифференциалы $d\psi_1$ и $d\psi_2$ через независимые переменные токи i_1 и i_2 на основе уравнений (1.25):

$$d\psi_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial i_1} di_1 + \frac{\partial \psi_1}{\partial i_2} di_2,$$

$$d\psi_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial i_1} di_1 + \frac{\partial \psi_2}{\partial i_2} di_2,$$

где производные $\partial \psi_n / \partial i_k$ представляют при $k = n$ собственные, а при $k \neq n$ – взаимные индуктивности контуров. С учетом приведенных соотношений интегралы энергии после некоторой группировки приводятся к виду

$$W_m = \int_0^{i_1} (L_{11}i_1 + L_{12}i_2) di_1 + \int_0^{i_2} (L_{21}i_1 + L_{22}i_2) di_2.$$

Выбирая желательную траекторию перехода от начального положения до конечного (функция энергии, как было показано выше, есть функция потенциальная), получим

$$W_m = \frac{1}{2} (L_{11}i_1^2 + L_{12}i_1i_2) + \frac{1}{2} (L_{21}i_1i_2 + L_{22}i_2^2),$$

или, с учетом (1.25), в другой форме

$$W_m = \frac{1}{2} (\psi_1 i_1 + \psi_2 i_2).$$

Такое же выражение для энергии получится, если провести интегрирование по частям (1.24):

$$\int^{\psi_1} i_1 d\psi_1 + \int^{\psi_2} i_2 d\psi_2 = (i_1 \psi_1 + i_2 \psi_2) - \left(\int^{\psi_1} \psi_1 di_1 + \int^{\psi_2} \psi_2 di_2 \right).$$



Используя известные выражения для потокосцеплений и проводя интегрирование, по траектории движения, подобной предыдущему случаю, найдем выражение энергии такое же, как и на основе (1.40).

Здесь мы обратим внимание на симметрию выражений для энергии (1.36) и (1.38). В первом случае мы имеем

$$\int_{\psi_1}^{\psi_1} i_1 d\psi_1 + \int_{\psi_2}^{\psi_2} i_2 d\psi_2 = W_m,$$

во втором

$$\int_{\psi_1}^{\psi_1} \psi_1 di_1 + \int_{\psi_2}^{\psi_2} \psi_2 di_2 = W_m.$$

Отмеченная симметрия справедлива только при линейной связи между токами и потокосцеплениями, которая была использована при выводе приведенных выражений (общий случай будет рассматриваться далее).

Другая форма для запасенной энергии получится, если принять в качестве независимых переменных потокосцепления, а в качестве сил – токи. Для этого разрешим систему (1.23) относительно токов

$$\begin{aligned} i_1 &= \Gamma_{11}\psi_1 + \Gamma_{12}\psi_2, \\ i_2 &= \Gamma_{21}\psi_1 + \Gamma_{22}\psi_2, \end{aligned}$$

где Γ_{kn} – инверсные индуктивности, причем $\Gamma_{12} = \Gamma_{21}$. После подстановки в (1.38) приведенных выражений для токов получим

$$W_m = \int_0^{\psi_1} (\Gamma_{11}\psi_1 + \Gamma_{12}\psi_2) d\psi_1 + \int_0^{\psi_2} (\Gamma_{21}\psi_1 + \Gamma_{22}\psi_2) d\psi_2,$$

откуда после уже знакомой процедуры, связанной с выбором пути интегрирования, имеем

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2}(\Gamma_{11}\psi_1 + \Gamma_{12}\psi_2)\psi_1 + \frac{1}{2}(\Gamma_{21}\psi_1 + \Gamma_{22}\psi_2)\psi_2 = \\ &= \frac{1}{2}i_1\psi_1 + \frac{1}{2}i_2\psi_2. \end{aligned}$$

Распространяя приведенное выражение на произвольное число контуров n , имеем следующие выражения для определения запасенной энергии:

$$W_m = \sum_{k=1}^{k=n} \int \psi_k d\psi_k = \sum_{k=1}^{k=n} \int \psi_k di_k, \quad (1.41)$$

$$W_m = \sum_{n=1}^n \sum_{k=1}^{k=n} L_{kn} i_k i_n, \quad (1.41a)$$

$$W_m = \sum_{n=1}^n \sum_{k=1}^{k=n} \Gamma_{kn} \psi_k \psi_n, \quad (1.41б)$$

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n=k} \psi_k i_k. \quad (1.41в)$$

Подчеркнем, поиск энергии по любой из приведенных формул проводится при фиксированных координатах q_i , определяющих взаимное положение контуров и геометрию магнитной системы. Важно заметить, что их применение ограничивается линейными системами – системами, где связь между токами и потокосцеплениями является линейной, т. е. индуктивности являются величинами, не зависящими от токов.

Работа, совершаемая пондеромоторными силами F_i , равна изменению запасенной энергии W_m , значение которой задается любым из уравнений (1.35):

$$dW_m = \sum_{i=1}^{j=i} \frac{\partial W_m}{\partial q_i} dq_i = \sum_{i=1}^{j=i} F_i dq_i,$$

где сила

$$F_i = \frac{\partial W_m}{\partial q_i}$$

задается выражением, вид которого указывает, что она находится при постоянстве токов и координат q_j , где $j \neq i$.



Обратим внимание и на следующее. Как видно из приведенных выражений для сил и энергии, их вид совпадает с выражениями, полученными ранее для случая, когда токи контуров были постоянными, т. е. в случае переменных токов указанные величины определяются мгновенными значениями токов и не зависят от характера их изменения. Такое положение является следствием допущения, что переменный ток вдоль контура распространяется мгновенно, т. е. сила тока в любом сечении контура будет одинаковой, его действие в любой момент времени будет таким же, как и постоянного тока того же значения. Такое допущение сделано при записи уравнения напряжений (1.24), в противном случае оно содержало бы частные производные. И хотя в действительности скорость распространения тока конечна, при частотах до 100 000 Гц она мало отличается от скорости света, и поэтому при конечной длине контура тока принятое допущение вполне обосновано и широко используется на практике.

Переменный ток, действие которого в любой момент времени соответствует постоянному току, называют квазистационарным током. Здесь и далее мы будем иметь дело с переменными токами, которые будут удовлетворять указанному условию – условию квазистационарности («квази» означает мнимый, ненастоящий, т. е. в нашем случае – ненастоящий постоянный ток).

Выше при поиске выражения для запасенной энергии W_m мы воспользовались ее важным свойством – она является потенциальной функцией, т. е. представляет работу, значение которой не зависит от траектории (пути) от начального до конечного положения. Это свойство позволило успешно взять соответствующие интегралы. Критерием потенциальной природы некоторой функции принималось условие, что совершаемая работа, равная изменению накопленной энергии, представляет полный дифференциал от соответствующих переменных. Но когда это условие будет выполняться – осталось за кадром. Здесь мы сделаем попытку устранить указанный пробел на основе материалов аналитической механики [3]. Итак, пусть существуют следующие зависимости (функции):

$$y_k = \sum_{n=1}^{n=k} c_{kn} x_n, \quad (k = 1 \dots n), \quad (1.42)$$

выражающие y_1, \dots, y_n в виде линейных функций от некоторых величин x_1, \dots, x_n . Для того чтобы представленная сумма была полным дифференциалом

$$\sum_{k=1}^{n=k} y_k dx_k = dW(x_1, \dots, x_k), \quad (1.43)$$

необходимо и достаточно выполнения условия

$$c_{kn} = c_{nk} \quad (k, n = 1, 2, \dots, k). \quad (1.44)$$

Справедливость приведенного утверждения покажем на примере, когда $n = k = 2$:

$$y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2; \quad y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2,$$

тогда, интегрируя (1.29), получим

$$W = \int_c (c_{11}x_1 + c_{12}x_2) dx_1 + (c_{21}x_1 + c_{22}x_2) dx_2. \quad (1.45)$$

Как известно, чтобы подынтегральное выражение было дифференциалом функции W от переменных x_1 и x_2 , необходимо и достаточно выполнения условия [3]:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} (c_{11}x_1 + c_{12}x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} (c_{21}x_1 + c_{22}x_2),$$

которое, в свою очередь, выполняется, если

$$c_{12} = c_{21}. \quad (1.46)$$

В этом случае интеграл (1.45) не зависит от выбора пути интегрирования, определяемого кривой (c), соединяющей заданные начальную и конечную точки. В результате получим

$$W = \frac{1}{2} (c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2) + \frac{1}{2} (c_{21}x_1x_2 + c_{22}x_2^2).$$

Причем обратим внимание, что значения y_1 и y_2 представляют градиент функции W по x_1 и x_2 при выполнении условия (1.46):

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 = y_1,$$