И. В. Шадрина

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ НАЧАЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ

УЧЕБНИК И ПРАКТИКУМ
ДЛЯ ПРИКЛАДНОГО БАКАЛАВРИАТА

Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по гуманитарным направлениям и специальностям

Книга доступна в электронной библиотечной системе
biblio-online.ru

Москва ▪ Юрайт ▪ 2019

УДК 372.851(075.8)
ББК 74.262.21я73
Ш16

***Автор*:**

Шадрина Ирина Вениаминовна — кандидат педагогических наук, доцент общеинститутской кафедры математики и информатики дошкольного и начального образования Института педагогики и психологии образования Московского городского педагогического университета.

***Рецензенты*:**

Ефимов В. Ф. — доктор педагогических наук, профессор кафедры теории и методики начального и дошкольного образования Московского государственного областного гуманитарного института, член-корреспондент РАЕ, заслуженный деятель науки и образования;

Глизбург В. И. — доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор общеинститутской кафедры математики и информатики дошкольного и начального образования Московского городского педагогического университета, Институт педагогики и психологии образования.

Шадрина, И. В.

Ш16 Методика преподавания начального курса математики : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / И. В. Шадрина. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 279 с. — (Серия : Образовательный процесс).

ISBN 978-5-534-08528-0

В учебнике рассматриваются теоретические основы начального математического образования, механизмы когнитивного развития детей младшего школьного возраста в процессе обучения математике, вопросы истории математического образования, методика формирования представлений о фундаментальных математических понятиях, основы обучения наглядной геометрии, различные подходы к обучению решению задач, вопросы организации научно-исследовательской работы студентов в процессе изучения курса. Практические задания направлены на овладение студентами опытом профессиональной деятельности.

Соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования.

Для студентов высших учебных заведений, подготавливающих бакалавров, магистров аспирантов общего начального образования, а также для преподавателей вузов и учителей начальной школы.

УДК 372.851(075.8)
ББК 74.262.21я73

ISBN 978-5-534-08528-0

Оглавление

Предисловие

Современная школа характеризуется стремлением к такому построению процесса образования и воспитания, которое обеспечивает максимально возможное для каждого ученика личностное развитие. Среди результатов обучения Федеральный государственный образовательный стандарт начального общего образования (ФГОС НОО) (далее — Стандарт) выделяет готовность и способность к саморазвитию; формирование ценностно-смысловых установок школьников, отражающих их индивидуально-личностные позиции; усвоение выпускниками компетенций, составляющих основу умения учиться; овладение опытом специфической деятельности по получению нового знания в конкретной предметной области, способностью его преобразования и применения[1].

Возможность достижения младшими школьниками требуемых Стандартом результатов обучения напрямую зависит от методической составляющей подготовки учителя. Процесс подготовки учителя регламентируется Федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования (ФГОС ВПО) по направлению «Педагогическое образование», профиль «Начальное образование». Согласно данному документу педагог должен уметь осуществлять педагогическую, культурно-просветительскую, научно-исследовательскую деятельность[2].

Требования Стандарта к учителю отражаются в компетентностном подходе в области методики преподавания математики в начальной школе и конкретизируются компетенциями — знание, умение, владение.

В результате изучения курса «Теория и методика преподавания математики в начальной школе» студенты должны:

знать

- предмет, цели, задачи обучения математике в начальной школе;
- теоретические основы обучения математике детей младшего школьного возраста;
- особенности формирования математических понятий в начальном математическом образовании;
- методологические принципы решения методических задач;

---

[1] Федеральный государственный образовательный стандарт начального общего образования (утвержден приказом Министерства образования и науки РФ от 6 октября 2009 г. № 373, с изм. от 18 мая 2015 г.).

[2] Федеральный государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки 050100 «Педагогическое образование» (квалификация (степень) «бакалавр») (утв. приказом Министерства образования и науки РФ от 22 декабря 2009 г. № 788, с изм. от 31 мая 2011 г.).

• современные представления о личностной и социальной значимости общего математического образования;

• историю, логику и тенденции развития методики обучения математике как науке об управлении процессом передачи культурно-релевантного знания следующим поколениям;

уметь

• обобщать и систематизировать методико-математическую информацию;

• проектировать и осуществлять организацию познавательной деятельности обучающихся в соответствии с целями и задачами начального математического образования;

• применять теоретические знания в ситуациях решения методических задач;

• выбирать подходы, обеспечивающие достижение запланированных результатов обучения;

• грамотно ориентироваться в курсах математики по различным системам обучения;

владеть

• методами преподавания, обеспечивающими гуманитаризацию и информатизацию учебного предмета «математика»;

• современными технологиями обучения, направленными на создание комфортной познавательной среды;

• спецификой мыслительных действий в познании математики;

• навыками поиска информации, необходимой для осуществления профессиональной деятельности;

• навыками работы с учебной и специальной научной литературой.

Базисные когнитивные идеи подготовки учителя в области методики обучения математике: обнаружение проблем; воссоздание знания в процессе преобразующей деятельности; выявление границ применимости знания; семиотические аспекты представления знания и его понимания — определили содержание и структуру учебника, в первом разделе которого излагается теория методики обучения математике в начальной школе, во втором — практическая методика.

Содержание теоретической части включает анализ следующих проблем начального математического образования: методологических предпосылок обучения математике; информатизации и гуманитаризации курса математики; исторических аспектов становления методики математики, ее современного состояния; методико-математических основ начального обучения математике; интеллектуального развития младших школьников.

Практическая часть пособия содержит изложение основных понятий методики обучения математике в начальной школе; методы, способы, приемы, средства и формы обучения математике; рекомендации по проведению учебно-научно-исследовательской деятельности. Изложение сопровождается заданиями для самостоятельной работы, направленными на овладение студентами как теоретических основ начального математического образования, так и практических знаний и умений, позволяющих осваивать технологии профессиональной деятельности.

В учебнике рассматриваются теоретические основы начального математического образования, механизмы когнитивного развития детей младшего школьного возраста в процессе обучения математике, вопросы истории математического образования, методика формирования представлений о фундаментальных математических понятиях, основы обучения наглядной геометрии, различные подходы к обучению решению задач, вопросы организации научно-исследовательской работы студентов в процессе изучения курса. Практические задания направлены на овладение студентами опытом профессиональной деятельности.

Учебник предназначен для студентов высших учебных заведений, подготавливающих бакалавров, магистров, аспирантов общего начального образования, а также для преподавателей вузов и учителей начальной школы.

Автор выражает искреннюю благодарность коллегам по кафедре, поддержка которых служила неизменным стимулом к созданию учебника, а также издательству «Юрайт» за организацию высокого уровня сотрудничества с авторами. Особую благодарность автор выражает своей ученице А. И. Болотовой за выявление ряда теоретических проблем при подготовке материала книги.

Введение

Мотив к изучению математики для ребенка определяется прежде всего генетической потребностью познавать мир, задавать вопросы, на которые интересно искать ответ, осваивая опыт познания объектов «невидимых» и «неслышимых», но позволяющих узнавать о доступных непосредственному восприятию предметах то, что трудно и даже невозможно было бы предположить. Понимание реального мира и возможностей его преобразования как условия не только адаптации, но и полноценной жизни в нем предопределяется развитой способностью мыслить. Но за всю историю человечества не найдено более действенного способа развития интеллектуальных и творческих способностей человека, чем изучение математики. Научить человека правильно рассуждать, отличать истинное от ложного, достоверное от возможного, ценить красоту интеллектуальных достижений — задача, решаемая преимущественно средствами математики. Академик А. И. Маркушевич писал: «Нельзя сводить всю проблему математического образования к передаче учащимся только определенной суммы знаний и навыков. Это закономерно ограничивало бы роль математики в общем образовании. Вторая задача, стоящая перед нами и не менее важная, чем первая, — это задача математического развития учащихся»[1].

Достижение указанных целей обучения математике напрямую зависит от готовности учителя воспитывать культуру мышления, формировать целостное представления о предмете познания, определять личностное отношение ученика к математической деятельности, развивать математические способности, уметь осуществлять исследовательскую деятельность в области начального математического образования.

Известно, что изучение математики для многих школьников связано со значительными трудностями. Можно ли объективно выявить их природу? Целый ряд выдающихся математиков искали ответ на этот вопрос. Так, выдающийся французский математик Ж. Адамар полагал, что одной из основных причин непонимания математики является то, что школьникам преподается конечный результат творческих поисков математика, а путь, который привел к данным результатам, из преподавания исключается. Это приводит к избытку формализма, проявляющегося в умозаключениях, основанных на формальной логике. В то же время открытие (конструирование) математических предложений, истинность которых подлежит проверке посредством логико-дедуктивного доказательства, как правило, связано с включением в процесс исследования интуиции, воображения, эстетических критериев.

---

[1] *Маркушевич А. И.* Об очередных задачах преподавания математики в школе. На путях обновления школьного курса математики. М. : Просвещение, 1978. С. 29—48.

В. А. Успенский, математик и языковед, полагал, что источник трудностей в овладении математикой кроется в сложности грамматических конструкций, определяющих математические понятия, и считал необходимым дополнять словесные определения наглядными представлениями, визуализацией изучаемых понятий.

Выдающийся швейцарский психолог Ж. Пиаже показал, что проблемы познания математики имеют прежде всего психологическую природу. В рамках генетической эпистемологии Пиаже установлено, что элементарные арифметические и геометрические представления органически связаны с базовыми структурами интеллекта, которые имеют далеко простирающееся сходство с основными видами математических структур, открытых Н. Бурбаки (собирательный псевдоним группы математиков): алгебраическими, порядковыми, топологическими. Такие структуры начинают формироваться в раннем возрасте задолго до появления «запасов позитивного знания».

По мнению Г. И. Саранцева, в последние 20—25 лет методическая наука из приложения дидактики трансформировалась в самостоятельную научную область. Акцент в профессиональной методической подготовке сместился в сторону усиления значимости методологии методической науки, овладения системным анализом, формирования умения адаптироваться к различным изменениям, осуществлять выбор технологии[1].

Методика обучения математике является системой, в которую в качестве компонента включен ребенок. Это обстоятельство предъявляет особые требования не только к организации познавательной деятельности детей при изучении математики, но и к новому взгляду на сам предмет изучения, на математику как гуманитарно-ориентированный предмет, к которому нельзя подходить с мерками технической культуры. С этих позиций математические объекты выступают как субъекты, которые можно «понять, услышать, увидеть». Отсюда роль семиотического подхода (языка в широком смысле) в гуманитаризации математики как учебного предмета и обращения к технологиям, позволяющим создавать для ребенка свободу выбора предпочтительных для него способов познания и понимания.

Переход от образовательной парадигмы индустриального общества к образовательной парадигме постиндустриального означает отказ от понимания математического образования как получения готового знания, при котором цель обучения — усвоение известного содержания, заданного в форме дидактических единиц. Подготовить будущего учителя к решению методико-математических задач, способствующих достижению сформулированных Стандартом результатов обучения, — основная направленность предлагаемого пособия.

[1] *Саранцев Г. И.* Современное методическое мышление как ключевая компетенция педагога // Педагогика. 2014. № 3. С. 3—11.

Раздел I
ТЕОРИЯ МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

Глава 1
МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ НАЧАЛЬНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

В результате изучения материала данной главы студент должен:

знать

• сущность различных мировоззренческих концепций в методологии образования;

• особенности математики как предмета познания;

• семиотические аспекты обучения математике;

• значимость понимания математики ребенком;

уметь

• выявлять значение и смысл знакового представления математического объекта;

• видеть связи и различия гуманизации и гуманитаризации математического образования;

• обосновывать необходимость включать в мыслительную деятельность детей как рациональные, так и интуитивно-образные сферы мышления;

владеть

• понятиями знаниевой и компетентностной парадигмы математического образования.

1.1. Мировоззренческие основы образования

Вопросы для обсуждения

1. Каково значение мировоззренческих установок для системы образования?
2. Каковы цели авторитарного воспитания?
3. В чем суть мировоззренческих установок Сократа на образование и воспитание?
4. Как изменяет подходы к образованию аристотелевский принцип природосообразности?
5. В чем суть гуманистической концепции пансофизма Я. А. Коменского?
6. Каковы связи философии прагматизма и компетентностного подхода?
7. Каковы связи философии экзистенциализма и педагогической антропологии К. Д. Ушинского?
8. Каково соотношение гуманизации и гуманитаризации математического образования?
9. Каково значение позитивизма и основанного на его идеях семиотического подхода в образовании?
10. В чем значимость диалектико-материалистической теории познания как основы системно-деятельностного подхода в современном образовании?

Развитие педагогической мысли на протяжении веков свидетельствует о том, что образование существенным образом определяется мировоззренческими установками, господствующими в социуме. Например, уже в греческих мегаполисах реализуются два противоположных подхода к образованию. Авторитарная педагогическая модель спартанского воспитания исходила из отношения к учащемуся как к объекту, все требования к которому были оправданы высшей целью воспитания гражданина, готового защищать государство. Афинская педагогическая система являла собой один из вариантов гуманистической модели. **Диалектика** Сократа (469—399 до н.э.) предопределила понимание воспитания как постоянного нравственного, умственного и физического самосовершенствования, а главным методом обучения в данной образовательной системе был диалогический поиск истины учителем и учеником. Аристотель (384—322 до н.э.), во главу угла ставивший познание природы, трактовал образование с позиций *природосообразности*: образование открывает возможности познания реального мира.

Основной мировоззренческий аспект педагогической теории Я. А. Коменского (1592—1670) составляла фундаментальная гуманистическая идея **пансофизма**, понимаемая как всеобщая мудрость для всех людей независимо от общественной, расовой, религиозной и половой принадлежности. В то же время именно в педагогической системе Коменского было заложено технократическое отношение к ученику, обусловившее разделение обучения и воспитания. Если в предшествующие века целью образования было *воспитание* человека — гражданина, представителя самобытной культуры, то согласно педагогической теории Коменского главной миссией образования стала подготовка подрастающего поколения к жизни и труду. Обучение и воспитание разделялись и теоретически, и практически.

С начала XX в. наибольшее мировоззренческое влияние на педагогическую теорию и практику обучения стал оказывать **прагматизм**, установки которого сводят образование к расширению личного опыта ученика для того, чтобы он мог как можно лучше *приспособиться к существованию в данном социуме*. Цель обучения и воспитания — *научить ребенка жить*. Отсюда отрицание необходимости формирования систематических знаний, учебный материал отбирается на основе принципа практической полезности, формируется идеал будущего для ребенка как личный успех и высокий уровень благосостояния. Один из основоположников прагматизма Дж. Дьюи (1859—1952) считал основным механизмом и, соответственно, методом получения знаний «обучение через делание», т.е. выполнение практических заданий и упражнений (например, с помощью метода проектов). Роль учителя сводится к выполнению функции помощника, консультанта. С позиций прагматизма в настоящее время широкое распространение получила концепция «хорошее образование для карьеры». Эта концепция обеспечивает идейную поддержку *компетентностному подходу* в обучении, разрабатываемому зарубежной и отечественной психолого-педагогической теорией.

Другим ключевым элементом современного педагогического мышления стала гуманизация образования, мировоззренческие истоки которой лежат в **экзистенциализме**, провозгласившем человека свободным в том смысле, что он сам «проектирует», создает себя. Гуманистическая ориентация в центр образовательного процесса ставит ученика. В обучении главным становится не номинативное изучение дисциплины, при котором учащийся запоминает общепринятые и изложенные в учебниках определения, закономерности и другие сведения, а его *индивидуально-творческая деятельность*, ведущая к пониманию окружающей действительности в форме индивидуальной системы знаний. В отечественной педагогике гуманистические установки нашли воплощение в педагогической антропологии К. Д. Ушинского (1824—1870). В настоящее время наиболее известна гуманистическая система Ш. А. Амонашвили и теория личностно ориентированного обучения (И. С. Якиманская, В. В. Сериков и другие).

Экзистенциалистские идеи в педагогике оказывают значительное влияние на гуманизацию и гуманитаризацию общего математического образования, включая обучение математике в начальной школе. Гуманизация и неразрывно с ней связанная тенденция к гуманитаризации математического образования требует не только учета интеллектуальных возможностей ребенка в оперировании абстрактными математическими сущностями, но и акцентирует внимание педагога на понимании изучаемого знания как основной функции гуманитарных наук.

Возникшая в рамках философии *неопозитивизма* наука о знаках и знаковых системах — **семиотика** (Ч. Пирс, Ч. Моррис, Ф. де Соссюр и другие) оказывает значительное влияние на развитие как теоретических, так и эмпирических проблем педагогики в форме *семиотического подхода* к образованию. Его значимость определяется тем, что:

- сознание, культура и образование представляются как знаковая деятельность (А. Я. Данилюк);
- освоение ребенком знаковых операций знаменует переход от традиций натурального развития к новым формам культурно-психологического поведения (Л. С. Выготский);
- в рамках семиотики знаковые системы являются средством выражения и представления значения и смысла.

Основное требование к знаку — он должен быть понятен тем, кто его использует, должно быть известно, замещением (обозначением) чего он является. Так как математические объекты «материализуются» только знаками, то одной из главных задач обучения математике является задача выяснения того, какой математический объект замещается тем или иным знаком, каков его смысл и значение. Если учесть, что на начальной ступени образования формируются основополагающие знания о фундаментальных математических понятиях, таких как число, величина, алгебраическая операция, геометрическая фигура, алгоритм, необходимые для продолжения не только математического образования, то значимость семиотического подхода в обучении младших школьников математике трудно переоценить.

Диалектико-материалистическая теория познания основывается на том, что всякое познание осуществляется человеком в процессе активной преобразовательной деятельности, формирующей идеальные объекты, которые служат средством познавательного освоения объективного мира. Познание начинается с ощущений, с чувственного ознакомления с материалом, а завершается рациональным обобщением.

В рамках материалистической диалектики отечественной психологической наукой разработана теория деятельности, основы которой были заложены исследованиями Л. С. Выготского (1896—1934) и А. Н. Леонтьева (1903—1979). Ядро теории деятельности составляет принцип предметности. Причем предмет понимается не как сам по себе существующий объект природы, а как предмет деятельности человека, безразлично внешней или внутренней. Субъект и объект рассматриваются как полюса целостной системы деятельности, внутри которой только и приобретаются присущие ей системные качества. Деятельность, определяемая самим предметом, в дальнейшем направляется и регулируется его образом, причем образ возникает в условиях активного действия субъекта в поисковой проблемной ситуации.

Понятие «образ мира» как центральная категория, выполняющая функцию психологического описания процесса познания, является условием адекватности восприятия отдельного предмета. Образ мира в принципе амодален, в него входят как чувственные, так и сверхчувственные компоненты, такие как смысл и значение. Образ мира является универсальной формой организации знаний, определяющей возможности познания и управления поведением. В нем снимаются жесткие границы между чувственным и рациональным знанием, выступают в единстве аффект и интеллект.

С позиций теории деятельности результат математического образования может рассматриваться как математический образ мира человека, выполняющий двоякую функцию: с одной стороны, образ мира формируется в процессе познания, а с другой — он является необходимым условием познания, представляя собой ту систему, которая потенциально содержит возможности ее развертывания, обогащения и усложнения. **Системно-деятельностный подход** составляет основу ФГОС НОО (2009).

Современная ступень в развитии цивилизации характеризуется увеличением роли информации и знаний в жизни общества, которое приобретает черты информационного (постиндустриального), что оказывает все возрастающее влияние на образование. Особую роль в постиндустриальном обществе играют теоретические знания, преобладание теории над эмпирией, усиление значимости таких операций, как абстрагирование, использование алгоритмов, обработка и преобразование информации. Информационное видение проблем образования выявило существенную роль в познании не только логики, но и мотивации, чувств, эмоций, эстетических пристрастий, позволило заметить расширение познавательных возможностей человека. Прогресс информационно-коммуникационных технологий (ИКТ) открывает возможности более эффективно создавать у познающего субъекта личностно-знаниевую картину мира, в том числе за счет развития средствами ИКТ образно-пространственного и логического мышления[1].

Таким образом, для младшего школьника изучение математики способствует освоению интеллектуально-познавательной деятельности в не-

[1] *Тарасов Ю. Н.* Философские проблемы информатики : учеб. пособие. М. ; Воронеж : НПО «МОДЕК», 2007.

скольких различных направлениях. Основное направление связано с развитием в интеллектуальном процессе двух фаз решения познавательной задачи: подготовительной и исполнительной, при этом развивается умение логически рассуждать и пользоваться понятиями. Второе направление связывается с усвоением и активным использованием речи как средства мышления. Третье направление предполагает развитие и взаимодействие различных планов мышления, в том числе образного и теоретического.

Задания для самостоятельной работы

1. Опишите обучение Сократом юноши — раба Менона геометрии в процессе специально организуемого диалога, представленного в интернет-источнике: http://viktr.narod.ru/select/platon/1/menon.htm. Подготовьте соответствующее сообщение и презентацию, в которой воспроизведите подразумеваемые в рассуждении рисунки.
2. Подготовьте сообщения по следующим темам.
- Требования ФГОС НОО (2009) к воспитанию младших школьников.
- Прагматизм и компетентностный подход в образовании.
- Концепция личностно ориентированного образования.
- Системно-деятельностный подход в начальном образовании.
- Философские концепции и их влияние на систему образования.
- Образование в информационном обществе.
- Требования ФГОС НОО к результатам образования в области математики и информатики.
3. Подготовьте сообщение и презентацию по теме «Знаки в начальном математическом образовании» (воспользуйтесь любым учебником математики для начальной школы).
4. Напишите эссе на тему «Интернет и образование».

1.2. Математика как предмет познания в начальной школе

Вопросы для обсуждения

1. Каковы предпосылки математического познания?
2. Что представляют собой первичные исходные элементы в математике?
3. Каковы взгляды Ж. Пиаже на онтологию математического познания?
4. Каковы взгляды Платона и Аристотеля на онтологию математических объектов?
5. В чем состоит роль знака (текста) в математическом образовании?
6. Истинность фактов в математике и в начальном математическом образовании, в чем сходство и различие?
7. Каковы особенности теоретического и эмпирического подходов в обучении математике?
8. Каковы связи принципов научности и системности в обучении математике младших школьников?
9. Каково значение принципа систематичности в математическом образовании?
10. В чем суть онтологических связей принципов доступности и наглядности в обучении математике младших школьников?

Познание начинается с момента возникновения проблемы. Пока не осознано наличие проблемы как знания о незнании не может начаться и процесс познания. Постановка проблемы — не только осознание того, что мы еще не знаем, но и готовность к поискам ее решения. Возникновение проблемы обусловлено некоторыми предпосылками в виде предзнания, которое может быть как результатом действий человека в реальном мире, так и результатом воображения, необходимого для формирования идеи и возникновения на ее основе вопроса, поиск ответа на который и составляет суть познания.

Предзнание в математике может представлять собой некоторые элементы как первичные исходные, из которых можно построить теорию, дающую способ решения имеющейся проблемы. Например, в качестве исходных элементов геометрии полагают точку, прямую, плоскость. Сами по себе абстрактные математические понятия «точка» или «прямая» никаким наличным материальным бытием не обладают и не обладают никакими индивидуальными свойствами, а все, что познается о точках и прямых, исчерпывается тем, что проявляется в их взаимодействии с другими геометрическими объектами. Причем описания вида «точка есть то, что не имеет ни величины, ни частей» ничего не определяют и нигде в геометрии не используются. Тем не менее такого рода описания играют психологическую роль, они нужны как опора мысли, мышление не может быть беспредметным. И точка, и прямая предъявляются учащимся чаще всего в форме графических моделей.

Возможен и другой подход к введению исходных элементов познания в математике. Он состоит в том, что исходные элементы задаются не сами по себе, а вычленяются из некоторой системы, так или иначе известной из предшествующего опыта. Как показал Ж. Пиаже, *онтологическая специфика математического познания* состоит в том, что понимание абстрактных математических структур опирается на неявное знание, связанное с элементарными арифметическими и геометрическими представлениями, которые формируются весьма рано и независимо от целенаправленного обучения. Опора на такие представления позволяет трактовать, например, точку как результат дифференциации и интеграции имеющихся у детей знаний об окружающем пространстве и тел в этом пространстве, местонахождение которых можно некоторым наглядным образом фиксировать, а линию рассматривать как траекторию движения некоторого объекта, в частности точки.

Вместе с тем обучение математике не может игнорировать вопрос об онтологической сущности математических объектов, различные взгляды на природу которых восходят к Платону и Аристотелю. Так, Платон считал, что математические объекты существуют сами по себе, так сказать, «в готовом» виде, в мире идей и лишь *открываются* интеллектуальными усилиями человека. Аристотель, напротив, полагал, что математические понятия *создаются* в процессе конструктивной и преобразующей деятельности человека в реальном (вещественном или идеальном) мире, и существуют в форме мысленных образов, которые «материализуются» теми или иными знаками. И Платон, и Аристотель отмечают абстрактность математических сущностей, как материальные объекты они представлены только знаками.

С методологических позиций знак (знаковая форма, схема) являются объектом действия. Причем знаковые обозначения в математике таковы, что они, вообще говоря, не допускают разночтений, двусмысленностей, позволяют производить действия с ними по однозначно определенным правилам. Такое положение «провоцирует» направленность педагогических усилий на обучение этим правилам. Знаки «удобнее» и «доступнее», чем репрезентируемое ими содержание, и в условиях обучения могут неправомерно доминировать над обозначаемым содержанием. При этом знак воспринимается либо как обозначающий самого себя, либо как неотъемлемый атрибут репрезентируемого знаком объекта. Например, «2» — это и есть число два.

С другой стороны, математические понятия, правила, отношения и связи предъявляются познающему субъекту, как правило, не отдельными знаками, а текстами, чаще всего представляющими собой последовательность слов или собственно математических знаков. Например, прием нахождения суммы 7 + 5 может быть задан следующим текстом: найди число, которое дополняет 7 до 10, найди число, которое дополняет найденное число до 5, прибавь полученное число к 10; запиши ответ. Очевидна сложность данного текста, а избежать громоздких словесных описаний удается не всегда. В обучении математике сложность грамматических конструкций, обозначающих математические понятия линейной последовательностью слов или каких-либо других знаков, является одной из причин, затрудняющих ее усвоение.

Если обратиться к аристотелевскому взгляду на математический объект как на результат деятельности познающего субъекта в реальном мире, существующий только в виде мысленного образа, то обучение, преодолевающее трудности такого рода, должно идти по пути конструирования в сознании учащихся понятийного образа математического объекта, адекватного его объективному содержанию. Этот образ обозначается знаком. Понятийный образ, создаваемый в процессе обучения, не обязан совпадать с объективным содержанием математического объекта во всей его полноте, но обязан содержать то знание, которое не подлежит изменению, но может расширяться и обогащаться в процессе дальнейшего обучения.

Особый онтологический статус математики приводит к другой проблеме ее преподавания: проблеме установления истинности математического знания. Онтологическая сущность математических объектов обусловливает невозможность установления истинности утверждений математики ни непосредственным наблюдением, ни результатами специально организованного эксперимента. Единственным способом установления истины в математике служит доказательство: последовательность умозаключений, каждое из которых является либо следствием предшествующих, либо доказано ранее. Такое положение приводит к необходимости принять некоторые утверждения за истинные без доказательства. По целому ряду причин обучение математике в школе по такой логической схеме невозможно. Более того, данная схема не гарантирует возможности того, что среди доказываемых утверждений не встретятся такие, одно из которых является отрицанием другого, что подвергает сомнению выбор исходных утверждений.

Тем не менее это не снимает проблемы обоснования истинности суждений, изучаемых в школе. Например, истинность результатов вычислений в пределах первой сотни может быть проверена практически на основе адекватных моделей числа и действий над числами. Причем учитель обязан понимать, что примеры, подтверждающие то или иное утверждение, не могут служить доказательством его истинности, но могут служить опровержением некоторых суждений, сформулированных по аналогии. Включение в процесс познания таких видов деятельности, которые ведут к «открытию» тех или иных математических фактов адекватными их сущности способами, не оставляют у детей сомнений в их истинности, оставаясь тем не менее гипотезами, достоверность которых увеличивается подтверждающими примерами. Хотя младший школьник все, что ему преподносится в школе, принимает, как правило, без сомнений, это не отменяет необходимости формирования у детей способностей контролировать, корректировать, подтверждать или опровергать истинность тех или иных предложений.

Сложившиеся в начальном математическом образовании эмпирический и теоретический подходы индуцируют различные стратегии обучения. **Эмпирический подход** определяет репродуктивный характер обучения, его цель — воспроизведение учащимися учебного материала в том виде, в котором он предлагается как предмет усвоения. Представители эмпирического подхода ставят во главу угла объяснительно-иллюстративный метод, направленный на формирование знаний, умений и навыков и отражающий реалии уходящего в историю индустриального общества. Как отмечает А. Я. Данилюк, классическая зуновская дидактика, основанная на эмпирическом подходе, стала устаревать по мере появления учения А. Н. Леонтьева о личностных смыслах, теорий развивающего обучения и современных концепций личностно ориентированного образования[1].

Теоретический подход определяет продуктивный характер обучения, создание условий для самореализации личности в качестве главной цели образования. Продуктивные методы обучения математике, в основе которых лежит теория деятельности, позволяют ребенку конструировать понятийные образы математических объектов в процессе специально организуемой предметной (в логическом, а не только материальном смысле) деятельности, совершать «обратный» выход в предметную деятельность при решении познавательных задач. Представители теоретического подхода считают необходимым и возможным в процессе обучения математике формировать у младших школьников мышление в понятиях и о понятиях. Теоретический подход способствует достижению одной из наиболее значимых целей общего математического образования: цели «приведения ума в порядок», сформулированной еще М. В. Ломоносовым. С другой стороны, теоретический подход, ориентируясь на реалии постиндустриального общества, смещает акценты в математическом образовании: *главным в обучении становится не обучение счету в широком смысле, а понимание*

[1] *Данилюк А. Я.* Теория интеграции образования. Ростов н/Д : Изд-во Ростовского педагогического университета, 2000. С. 204.

сущности и места математики в целостном знании о мире. С этих позиций классические дидактические принципы в обучении математике приобретают новые оттенки.

Системообразующим принципом обучения знаниевого типа является ***принцип научности***, он состоит в том, что учащимся для усвоения предлагаются подлинные, прочно установленные наукой знания, а используемые методы обучения по своему характеру приближаются к методам изучаемой науки. Не отменяя принципа научности, гуманистическая сторона математического образования определяет его прежде всего в отношении к ученику. Так, в системе обучения математике в начальной школе, разработанной под руководством В. В. Давыдова, принцип научности реализуется посредством опоры на конструктивно-генетическую природу математических объектов, что соответствует историческому ходу становления и развития математики: в сжатом виде ученик на основе теории учебной деятельности проходит тот путь познания, который приводит к новому знанию.

Часть принципа научности — ***принцип системности***, так как научные знания системны по своей сущности. В обучении математике младших школьников этот принцип, как правило, реализуется внутри каждой из содержательных линий курса: арифметической, геометрической, алгебраической, в настоящее время и в линии обучения информатике, но вызывает трудности в обосновании математических и логических связей между ними.

Принцип систематичности выражает ту сторону принципа научности, которая фиксирует соответствие обучения математике науке педагогике. Согласно этому принципу учебное содержание логически располагается так, чтобы новое знание выводилось из предыдущего и, в свою очередь, служило основой последующего с учетом познавательных возможностей учащихся на данном этапе обучения. Построение системы обучения арифметике по десятичным концентрам, основы которого были заложены еще в XVIII в., позволяет реализовать принцип систематичности, организуя обучение от простого к сложному, от известного к неизвестному.

Принцип доступности обучения состоит в том, что математическое знание становится доступным младшему школьнику в результате его дидактической реорганизации, которая, сохраняя содержание изучаемого знания, адаптирует его к познавательным возможностям ребенка. Доступное обучение формирует первоначальные, не развитые в теоретическом отношении представления, образующие основу для системного научного знания. Оно осуществляется в процессе перевода математического знания на доступный ученику язык. Доступное обучение приближает научные знания к сознанию ученика посредством их упрощения. Проблема в том, что в обучении математике, при этом возможны упрощения, искажающие объективное содержание изучаемого знания, вопреки необходимости воспроизвести в сознании ученика объективное научное знание и способы научного мышления, в той мере, в какой это достижимо на каждом конкретном отрезке обучения. Например, сообщение учащимся того, что «вычитание есть операция, обратная сложению», само по себе требующее уточнения, принесет детям больше вреда, чем пользы, в силу того, что возможности формирования понятий «алгебраическая операция» и «обратная алгебраическая операция» в начальной школе крайне ограничены, если не допускать искажения их содержания.

Принцип наглядности стоит на одном из первых мест среди принципов обучения в начальной школе, в том числе в обучении математике. Принцип наглядности определяет особую форму организации дидактической системы, в которой параллельно вербальному или знаковому описанию объекта различными текстами дается его представление в визуальной форме, т.е. знание одновременно предъявляется как в словесной, так и в визуальной форме.

Наглядность в обучении математике имеет совершенно иной характер в сравнении с другими изучаемыми в начальной школе дисциплинами. Математический объект в принципе не может быть предъявлен наглядно. Реализация принципа наглядности в начальном математическом образовании не может сводиться к занимательным картинкам, даже если они и вносят в процесс познания эмоциональные эффекты. Принцип наглядности обучения математике может быть реализован только с помощью специальных средств: предметных, графических, символических и др. Например, лист бумаги может служить моделью поверхности, а отрезок — моделью непрерывной величины. Особую роль принцип наглядности играет в дидактической системе обучения математике, разработанной под руководством В. В. Давыдова, в которой наглядное представление математических объектов, свободное от каких бы то ни было «привходящих обстоятельств», играет системообразующую роль. Необходимость расширения и уточнения используемых средств наглядности в начальном математическом образовании связана, в частности, с трудностями изучения геометрии в основной школе, обусловленные тем, что непрерывно-континуальный язык абстрактной «картинки» с трудом воспринимается школьниками по причине недостаточности соответствующего познавательного опыта.

Принцип связи теории с практикой предполагает систематическое усвоение знаний с практическим их применением в соответствующих жизненных ситуациях. В обучении математике младших школьников он реализуется прежде всего в процессе решения текстовых задач, т.е. задач в которых требуется найти те или иные количественные/качественные характеристики ситуации, описываемой вербально и имеющей определенную фабулу. С другой стороны, особое положение текстовых задач в математическом образовании заключается в том, что они выступают и как средство, и как цель обучения. Несмотря на то что исследований проблем, связанных с обучением младших школьников решению текстовых задач достаточно, эти проблемы до сих пор остаются актуальными в методике обучения математике.

В то же время принцип связи теории с практикой обладает бóльшими дидактическими возможностями в сравнении с принципом наглядности. При реализации принципа связи теории с практикой наблюдение за математическим объектом может происходить на фоне адекватной ему природной или социальной среды в контексте его естественного поведения. Теоретическое знание перекодируется языком практики путем соотнесения слова и образа, рассуждения и действия. В начальном обучении математике принцип связи теории с практикой тесно взаимодействует с принципом наглядности.

Принцип активности, сознательности, прочности усвоения направлен на активизацию и интенсификацию мышления ученика, его становления как субъекта учения. Этот принцип характеризует обучение в целом в плане тех результатов, к которым оно должно привести, и общих условий, необходимых для этого. Результаты образования являются системообразующим компонентом ФГОС НОО, где целью и основным результатом образования выдвигается формирование *готовности к саморазвитию личности* на основе усвоения универсальных учебных действий.

Таким образом, идеальные абстрактные объекты математики как предмет познания предъявляются ученику для непосредственного усвоения и (или) выступают в качестве объекта преобразования, формируя в сознании учащихся представление о месте и роли математики в целостном представлении о реальном мире. С другой стороны, организация познавательной деятельности детей на основе дидактических принципов, направляющих процесс познания на становление субъекта учения, выполняет функцию воздействия на личностные характеристики учащегося в направлении его целостного и непротиворечивого развития.

Задания для самостоятельной работы

1. Подготовьте сообщения по следующим темам.

• Проблема, которую решают ученики при изучении отношения порядка, состоит в овладении умением выстраивать предметы в последовательность без опоры на их непосредственно наблюдаемые качества.

• Поверхность, линия, точка как исходное предзнание в обучении младших школьников элементам геометрии.

• Репродуктивный метод обучения математике в начальной школе: плюсы и минусы.

• Достоверность математического знания о сравнении чисел первого десятка и его обоснование в обучении первоклассников (свои выводы подтвердите заданиями из учебника математики М. И. Моро и др.).

• Принцип наглядности как средство формирования у первоклассников умений оперировать различными знаками (подтвердите свои выводы заданиями из учебника математики Г. В. Дорофеева и др.).

2. Покажите, что формирование понятия «величина» в системе Д. Б. Эльконина — В. В. Давыдова реализует теоретический подход. Свои выводы подтвердите заданиями из учебника математики В. В. Давыдова с соавторами.

3. Опираясь на принцип систематичности, постройте рассуждение на тему «Чтобы овладеть приемом письменного сложения чисел надо уметь складывать однозначные числа».

4. Н. Б. Истомина утверждает: «Прежде чем обучать решению текстовых задач, необходимо разъяснить детям, что такое сложение и вычитание». Докажите, что этим реализуется принцип системности. Подтвердите примерами из учебника Н. Б. Истоминой «Математика».

5. Напишите эссе на тему «Моя готовность осуществлять принцип научности в обучении математике».

6. Подготовьте выступление на тему «Личностная ориентация обучения математике предполагает обучение ребенка мыслить».

1.3. Семиотические аспекты обучения математике в начальной школе

Вопросы для обсуждения

1. Что представляют собой математические объекты? Почему их необходимо «материализовать»?
2. Что изучает семиотика? Что такое семиотическая система?
3. В чем отличие языка математики от естественных языков?
4. Что такое имя объекта с семиотической точки зрения?
5. Каковы отношения между «знаком», «значением» и «смыслом»?
6. Почему выявление смысла знаков является одной из важнейших задач обучения математике в начальной школе?
7. Как понимать утверждение: «Смысл — это то общее, что есть у всех предложений на разных языках, если они правильно переводят друг друга»?
8. Что такое семиотически неоднородные языки? Почему перевод с языка на семиотически неоднородный язык не может быть однозначно определенным?
9. Что такое синтактика, семантика и прагматика семиотической системы?
10. Почему семиотический подход способствует интеграции математики и информатики в одну образовательную область?
11. Почему внедрение информационных технологий, рассматриваемое с семиотических позиций, открывает принципиально новые возможности обучения математике в начальной школе?

Чтобы стать предметом изучения и применения, математический объект как идеальный понятийный образ, конструируемый познающим субъектом в процессе деятельности, в реальном мире «материализуется» **знаком** — элементом некоторой знаковой системы. Смысл и значение знака основывается на соглашении (конвенции) между теми, кто его использует. В единстве обозначаемого и обозначающего знак включается в процесс культурной коммуникации и служит, с одной стороны, формой хранения знания, а с другой — средством получения нового знания. Построенная по определенным правилам последовательность знаков образует текст. Тексты, в отличие от единичного знака, имеют неограниченные возможности хранения знаний (информации) и выполнения функции получения нового знания. Система знаков — **семиотическая система** — как средство культурной коммуникации представляет понимаемый в широком смысле язык. Это свойство знаковых систем определяет их значение в образовании. Семиотический подход означает использование в обучении математике различных языков с целью конструирования понятийных образов изучаемых объектов.

Ч. Пирс (1839—1914) — один из основателей семиотики (науки о знаках и знаковых системах) выделил три вида знаков: иконы, индексы, символы. ***Знаки-иконы*** обозначают некоторый объект максимально близко к обозначаемому объекту. Это могут быть рисунки, предметы, фотографии и т.п. ***Знаки-индексы*** служат обозначением не самих предметов, входящих в рассматриваемую ситуацию, а тех ее характеристик, которые абстрагированы в процессе исследования и вместе с тем частично сохраняют некоторые наглядно воспроизводимые связи с исходной ситуацией. ***Знаки-символы*** не имеют ничего общего с обозначаемым объектом, они действуют на наши органы восприятия не сами по себе, а той информацией, которую несут. В то же время чувственно-наглядный знак создает опору мысли, центр, вокруг которого возникают различные ассоциации, не позволяя мысли потонуть в потоке восприятий и представлений.

Синтаксис семиотической системы — это формальные правила, определяющие способы построения текстов (предложений, выражений) средствами данной системы и способов их преобразования, т.е. синтаксис — это отношения знаков между собой.

Отношения знаков к внешнему миру, к обозначаемым знаками объектам составляют **семантику системы**, определяя смысловое содержание информации, представленной текстом. Отношения между знаками и теми, кто их использует, — **прагматика системы**, она характеризует ценность и полезность сообщаемой информации.

Специальный научный язык математики, без овладения которым познание математики невозможно, образует семиотическую систему, которая обладает рядом особенностей. Во-первых, ее синтаксис — достаточно «жесткая» система правил, однозначно определяющих конструирование выражений математического языка и способы оперирования ими. Во-вторых, предложения математического языка, в отличие от языка естественного, например русского, вообще говоря, не допускают разночтений и двусмысленностей, т.е. представления математических объектов средствами математического языка определяют их однозначно. В то же время существуют глубокие причины того, что мысль, выраженная исключительно средствами искусственно созданного математиками символического языка, оказывается трудно воспринимаемой, в силу чего представление математического объекта не ограничивается языком математических знаков, а обращается как к обычной живой речи, так и к знакам, отличным от собственно математических.

Обозначение некоторого объекта средствами определенной семиотической системы есть его **имя**. Имя задает объект, которому данное имя присвоено, а сам объект является ***значением*** (денотатом) имени. Один и тот же объект может иметь разные имена. Например, «периметр прямоугольника» и «сумма длин сторон прямоугольника» имена одного и того же объекта. Но имя «периметр прямоугольника» обозначает только то, что объект с таким именем существует, а имя «сумма длин сторон прямоугольника» обозначает вполне определенный геометрический конструкт, из чего усматривается несовпадение их смыслов. Такое несовпадение легко заметить, если сопоставить вопросы: человек, недостаточно осведомленный, может вполне разумно спросить, является ли периметром прямоугольника сумма длин его сторон, но нелепо было бы выяснять, является ли периметр прямоугольника периметром прямоугольника.

Имя выражает смысл, который однозначно определяет значение имени. Смысл — это, грубо говоря, то, что понято, когда произнесено имя. Это значит, что усвоение смысла — необходимое условие адекватного воспри-