Е. В. Хорошилова

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ: НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ АКАДЕМИЧЕСКОГО БАКАЛАВРИАТА

2-е издание, переработанное и дополненное

Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по математическим и естественнонаучным направлениям

Москва ▪ Юрайт ▪ 2019

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73
Х79

***Автор*:**

Хорошилова Елена Владимировна — доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

***Рецензенты*:**

Фомичев В. В. — профессор, доктор физико-математических наук, заместитель заведующего кафедрой нелинейных динамических систем и процессов управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова;

Мухин С. И. — доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительных методов факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного универститета имени М. В. Ломоносова.

Хорошилова, Е. В.

Х79 Математический анализ: неопределенный интеграл : учеб. пособие для академического бакалавриата / Е. В. Хорошилова. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 187 с. — (Серия : Бакалавр. Академический курс).

ISBN 978-5-534-05715-7

В книге приводятся основные теоретические сведения о неопределенных интегралах, рассмотрено большинство известных приемов и методов интегрирования и различные классы интегрируемых функций (с указанием способов интегрирования). Изложение материала подкреплено большим количеством разобранных примеров вычисления интегралов (более 200 интегралов), в конце каждой главы приводятся задачи для самостоятельного решения (более 200 задач с ответами).

Книга предназначена для освоения на практике теории неопределенного интеграла, выработки навыков практического интегрирования, закрепления курса лекций, использования на семинарах и во время подготовки домашних заданий. Цель пособия — помочь студенту в освоении различных приемов и методов интегрирования.

Соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования.

Для студентов университетов, в том числе математических направлений, изучающих интегральное исчисление в рамках курса математического анализа.

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73

ISBN 978-5-534-05715-7

Оглавление

Предисловие ко второму изданию

Данное издание является учебно-справочным пособием по неопределенным интегралам, разработанным автором на основе длительного опыта проведения семинаров по математическому анализу на младших курсах факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова.

За время, прошедшее с момента выхода 1-го издания (2007 г.), старшеклассники, ориентированные в первую очередь на сдачу ЕГЭ с максимальными баллами, в большинстве своем стали испытывать нехватку общематематических знаний. Недостаток разнообразия решаемых в средней школе задач немедленно сказывается на общей подготовке школьников по математике (это не касается сильных физико-математических школ). В результате старшеклассники испытывают все бомльшие трудности в изучении основ математических дисциплин, и в частности начал математического анализа, что сказывается в целом на уровне подготовки приходящих на первый курс абитуриентов. Обращение к учебным пособиям, как классическим, так и созданным преподавателями вузов, где учится студент, дает возможность восполнить пробелы школьного образования, наверстать своих ушедших вперед сокурсников, которым посчастливилось учиться в хорошей математической школе, и глубже разобраться в данном предмете уже на новом уровне. Безусловно, студент первого курса должен для этого обладать навыком самостоятельной работы с учебной (специальной) литературой.

Данная книга успешно прошла апробацию временем и практикой на факультете ВМК МГУ, и хочется надеяться, что новое переиздание пособия расширит круг читателей и поможет студентам вузов повысить уровень своих знаний при изучении неопределенных интегралов.

Если кратко сформулировать цели данного издания, то в результате работы с данной книгой студент должен:

знать

• основные понятия, связанные с неопределенным интегралом;

• свойства неопределенного интеграла;

• приемы и методы вычисления неопределенного интеграла для разных классов функций;

уметь

• формулировать необходимые определения и свойства;

• применять необходимые свойства в решении задач;

владеть

• навыками вычисления интегралов разной сложности.

Предисловие к первому изданию

Книга посвящена одной их важнейших тем, традиционно изучаемых на первом курсе высших учебных заведений, — интегральному исчислению. Не все поступившие на первый курс изучали эту тему в средней школе, а научиться хорошо интегрировать за время отведенных по учебной программе 3-4 семинарских занятий является трудно выполнимой задачей даже для способных молодых людей, получивших в средней школе начальный опыт. Дело в том, что необходимо разбираться в существующих приемах интегрирования и многочисленных подстановках, на изучение которых требуется определенное время для выработки практических навыков.

Данная брошюра написана именно для того, чтобы любой студент, начинающий изучать интегральное исчисление, мог получить в сжатом виде информацию о наиболее изученных *классах интегрируемых функций* одной вещественной переменной, а также об основных *методах вычисления неопределенных интегралов*. Это тем более важно, что полученные при этом навыки пригодятся в будущем при изучении определенных, а также кратных, поверхностных, криволинейных и прочих видов интегралов.

В начале пособия приводятся определения первообразной и неопределенного интеграла, сформулированы важнейшие свойства интегралов, дается таблица наиболее часто используемых интегралов от элементарных функций, а затем для каждого класса интегрируемых функций (рациональные дроби, иррациональные, тригонометрические и другие функции) рассматриваются соответствующие приемы интегрирования. В этом смысле данное пособие является *мини-справочником* по приемам интегрирования. Каждый из приведенных способов вычисления интегралов иллюстрируется примерами решения задач.

Конечно, разобранных в пособии примеров задач недостаточно для более *детального* изучения этого раздела интегрального исчисления. В известной мере книга является лишь путеводителем по неопределенным интегралам, с помощью которого можно начать осваивать данный раздел. Практическое интегрирование с необходимостью должно предваряться изучением теории неопределенных интегралов с подробными выводами, теоремами и обоснованиями. При этом рекомендуется обращаться к проверенным временем учебникам по курсу математического анализа (например, трудам Г. М. Фихтенгольца, Л. Б. Кудрявцева и С. М. Никольского, В. А. Ильина, Э. Г. Позняка, В. А. Садовничего, Бл. Х. Сендова и других), научным трудам известных математиков по упомянутой теме, а также лекциям, читаемым для студентов факультета. И, конечно, работу с данной брошюрой надо сочетать с решением достаточного количества задач. Только тогда будут приобретены необходимые навыки практического интегрирования.

И в заключение несколько практических советов студентам. Следует иметь в виду, что проработку материала по любой теме не стоит откладывать «на потом», т.е на время сессии. Лучше всего делать это постепенно, параллельно тому, как на практических занятиях изучается с преподавателем тот или иной раздел. Если при этом возникают вопросы, то не надо стесняться задавать их преподавателю и свом коллегам. Важно проявлять инициативу, консультироваться у людей, лучше вас разбирающихся в данной области, используя любую возможность, поскольку вы заинтересованы в том, чтобы хорошо освоить изучаемую дисциплину.

Отвечая на экзамене на вопрос билета, четко формулируйте необходимые определения и свойства. Надо приучить себя к аккуратности и строгости проведения математических доказательств, быть готовым в любой момент, если понадобится, привести все необходимые пояснения и обоснования. Поэтому при работе с учебной литературой сразу обращайте внимание на встречающиеся в тексте определения и формулировки свойств, старайтесь их запомнить. Следует помнить, что во время экзамена студенту обычно предлагается решить одну или несколько задач, продемонстрировав тем самым навыки и умения использовать свои знания на практике. Для этого, как уже отмечалось выше, необходимы соответствующий опыт и постоянная тренировка в решении задач.

Пособие написано автором, кандидатом физико-математических наук, доцентом, на основе многолетнего опыта ведения семинаров по математическому анализу на первом курсе факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М. В. Ломоносова.

Глава 1
ПОНЯТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Интегральное исчисление — раздел математики, в котором изучаются свойства интегралов и связанных с ними процессов интегрирования. Простейшими понятиями интегрального исчисления являются неопределенный интеграл и определенный интеграл. Этот раздел тесно связан с дифференциальным исчислением, вместе с которым составляет одну из основных частей математического анализа. Как дифференциальное, так и интегральное исчисление базируются на методе бесконечно малых или методе пределов.

Большой энциклопедический словарь[1]

Напрасно думают, что она (фантазия) нужна только поэту. Это глупый предрассудок! Даже в математике она нужна, даже открытие дифференциального и интегрального исчислений невозможно было бы без фантазии.

В. И. Ленин

1.1. Историческая справка

В настоящее время изучение темы «интегралы» чаще всего начинают с понятия первообразной функции, потом вводят понятие неопределенного интеграла, изучают его свойства и уже затем переходят к изучению определенного интеграла и его разновидностей (собственного и несобственного видов) и установлению тесной связи неопределенного и определенного интегралов. Однако исторически первоначально сформировалось понятие интеграла определенного.

---

[1] Математика. Большой энциклопедический словарь / под ред. Ю. В. Прохорова. 3-е изд. М. : Большая российская энциклопедия, 2000.

Известно, что вплоть до конца XVII в. математики умели вычислять некоторые виды определенных интегралов, решая с их помощью отдельные практические задачи по вычислению площадей и объемов тел, однако в то время еще не существовало четкого общего определения определенного интеграла. Не существовало тогда и понятия первообразной. Это было связано с недостаточным развитием теории пределов и основанного на ней дифференциального исчисления. Их развитие, в свою очередь, тормозилось отсутствием строгой теории вещественного числа.

В конце XVII в. в Европе образовались две крупные математические школы, которые существовали на протяжении почти всего XVIII в. Главой одной из них был крупный немецкий ученый *Готфрид Вильгельм фон Лейбниц* (1646—1716). Как он сам, так и его ученики и сотрудники — *Гильом Франсуа Лопиталь* (1661—1704), братья *Якоб* (1654—1705) и *Иоганн* (1667—1748) *Бернулли*, а также его непосредственные последователи, в том числе *Леонард Эйлер* (1707—1783), жили и творили в основном на континенте. Вторая школа, предшественниками которой были *Джон Валлис* (1616—1703) и *Исаак Барроу* (1630—1677), возглавляемая *Исааком Ньютоном* (1643—1727), состояла из английских и шотландских ученых. В их числе был и *Колин Маклорен* (1698—1746). Работа обеих школ привела к большому прогрессу в области математического анализа, к созданию в достаточно законченном виде дифференциального и интегрального исчислений.

Так, Г. Лейбниц, исходя из понятия определенного интеграла, пришел к понятию функции $F(x)$, являющейся перво́бразной[1] для данной функции $f(x)$, так что $F'(x) = f(x)$. Отсюда следовало заключение о том, что дифференцирование и интегрирование являются двумя взаимно обратными операциями, вроде сложения и вычитания, умножения и деления, возведения в степень и извлечения корня. Вычисление интегралов Лейбниц и его ученики (первыми из которых являлись братья Я. и И. Бернулли) стали сводить к отысканию первобразных. При вычислении интегралов с определенными пределами с помощью неопределенных интегралов как Ньютон, так и Лейбниц пользовались носящей их имя формулой.

Среди используемых Лейбницем специальных способов интегрирования были замена переменной, интегрирование по ча-

---

[1] От слова «о́браз». Иногда встречается ударение на четвертом слоге.

стям, а также дифференцирование по параметру под знаком интеграла. Лейбницу принадлежит также идея интегрирования рациональных дробей при помощи разложения их на простейшие дроби, впоследствии усовершенствованная другими учеными. Именно Лейбниц предложил использовать для обозначения интеграла знак $\int y dx$ (1686), где символ $\int$ есть стилизованное удлиненное S (первая буква слова «Summa»).

Термин «первообразная» (или примитивная) функция ввел в начале XVIII в. *Джозеф Луи Лагранж* (1736—1813). Термин «интеграл» впервые употребил в печати Я. Бернулли в 1690 г., после чего вошло в обиход и выражение «интегральное исчисление».

Независимо от Г. Лейбница и еще до него эти результаты были получены И. Ньютоном. Многие задачи из механики и физики ведут, как известно теперь, к понятию первообразной функции и неопределенного интеграла, однако исторически, в частности у Ньютона, это понятие возникло из геометрии как задача квадратуры кривой. Ньютону удалось доказать, что площадь $S(x)$ криволинейной трапеции, ограниченной снизу осью абсцисс, сверху — графиком кривой $y = f(x)$, определенной и непрерывной на отрезке $[a; b]$, если ее рассматривать на отрезке $[a; x]$, где x — произвольно взятое на $[a; b]$ значение, есть первообразная функция для функции $y = f(x)$: $S(x) = F(x) - F(a)$. Это равенство, пользуясь современными символами, можно записать в виде

$$S = \int_a^x f(x)dx = F(x) - F(a).$$

Для определения площади всей криволинейной трапеции следует положить $x = b$:

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Это и есть так называемая *формула Ньютона — Лейбница*, содержание которой по существу восходит к И. Барроу. В ней определенный интеграл, рассматриваемый как функция верхнего переменного предела интегрирования x, представлен в виде одной из первообразных $F(x) + C$ ($C = -F(a)$) подынтегральной функции f. Эта формула носит также название *основной формулы интегрального исчисления*. Она позволяет сводить довольно сложное вычисление определенных интегралов, т. е. нахождение пределов интегральных сумм, к сравнительно более простой операции отыскания первообразных.

Правая часть в этой формуле называется *двойной подстановкой* и записывается в виде $F(x)\big|_a^b$. Итак, задача вычисления площади фигур, т. е. квадратура, ведет к понятиям как определенного, так и неопределенного интегралов. Вот почему вычисление интегралов стали иногда называть *квадратурой*. Важнейшую роль в интегрировании Ньютон уделял разложению интегрируемой функции в степенной ряд и затем почленному его интегрированию. Интегрирование в конечном виде также не было оставлено Ньютоном без внимания, хотя играло в его исследованиях второстепенную роль.

В XVIII в. наибольший вклад в развитие и популяризацию дифференциального и интегрального исчислений внес Л. Эйлер. До него кроме «Анализа бесконечно малых» Лопиталя (1696), содержащего лишь начальные сведения по дифференциальному исчислению, и курса лекций по интегральному исчислению И. Бернулли (1742), составленных, как и книга Лопиталя, в 1690-х гг., по сути, не было никаких учебников или общих руководств по этой новой отрасли науки. Указанные две книги значительно устарели и в первой половине XVIII в. отстали от развития анализа. Остро чувствовалась потребность в новом систематическом курсе. Это обстоятельство и побудило Эйлера составить полный курс математического анализа. Этот курс состоит из следующих книг:

1) «Введение в анализ бесконечных», 2 тома (1748);
2) «Дифференциальное исчисление», 1 том (1755);
3) «Интегральное исчисление», 3 тома (1768—1769).

Эти книги содержат как результаты работ предшественников и современников Эйлера, так и многие его собственные исследования в области анализа. В своих трудах Эйлер излагает многочисленные приемы вычисления неопределенных интегралов, применяя и развивая новые методы, такие как, например, интегрирование по параметру, использование разных подстановок (подстановки Эйлера) и др. В отличие от Лейбница, у Эйлера, как и у Ньютона, исходным является понятие первообразной, т. е. неопределенного интеграла. «Неопределенным» интеграл называется потому, что определяется с точностью до произвольной постоянной C. Определенный интеграл был для Эйлера лишь частным случаем неопределенного, одной из первообразных. Именно Эйлер предложил использовать знак $\sum$ (греческая буква «сигма») для обозначения интегральных сумм.

Существенный вклад в развитие интегрального и дифференциального исчислений внесли также французский ученый и просветитель *Жан Даламбер* (1717—1783) и, особенно, крупный французский математик *Огюстен Луи Коши* (1789—1857).

Развитием математического анализа в XIX в. занимались и русские ученые, например *М. В. Остроградский* (1801—1862) и *П. Л. Чебышёв* (1821—1894). Академику Михаилу Васильевичу Остроградскому принадлежат такие важнейшие результаты в области интегрального исчисления, как формула, сводящая вычисление тройного (и, вообще, n-кратного) интеграла к вычислению двойного (($n - 1$)-кратного) интеграла, общий прием интеграции рациональных функций, формула преобразования переменных в многомерных интегралах и др. Пафнутий Львович Чебышёв посвятил шесть больших мемуаров интегрированию алгебраических функций. Среди его классических результатов имеется знаменитая теорема об интегрировании биномиальных дифференциалов.

Итак, рассмотрим задачу восстановления функции по ее известной производной. Это важнейшая задача интегрального исчисления. Процедура нахождения функции по ее производной называется *интегрированием*. Интегрирование является процедурой, обратной дифференцированию (нахождению производной от заданной функции).

1.2. Понятие первообразной функции и неопределенного интеграла

Пусть на интервале $(a; b)$, возможно бесконечном, определена функция одной действительной переменной f.

Определение 1.1 (*точной первообразной*). Функция F называется *точной первообразной* по отношению к функции f на интервале $(a; b)$, если в любой точке x этого интервала функция F дифференцируема и имеет производную $F'(x)$, равную $f(x)$ (или, что то же самое, $f(x)dx$ служит дифференциалом для $F(x)$: $dF(x) = f(x)dx$).

Например, функция $\sin x$ является точной первообразной для функции $\cos x$ на множестве всех действительных чисел $\mathbb{R}$, поскольку $(\sin x)' = \cos x$.

Замечание. Под точной первообразной для функции f *на сегменте* $[a; b]$ будем понимать функцию F, имеющую производную $F'(x)$ в любой внутренней точке x сегмента, равную $f(x)$, и, кроме того, имеющую правую производную $F'(a + 0)$, равную $f(a + 0)$, и левую производную $F'(b - 0)$, равную $f(b - 0)$.

Заметим, что если функция f имеет на $(a; b)$ хотя бы одну первообразную функцию F, то она имеет на этом интервале сразу бесконечное множество первообразных, поскольку любая функция вида $F + C$, где C — произвольное действительное число, также будет удовлетворять определению первообразной. Более того, если F — одна из первообразных для функции f на $(a; b)$, то любая другая первообразная $\overline{F}$ для этой функции на данном интервале имеет вид $\overline{F} = F + C$, где C — некоторое действительное число. Таким образом, любые две первообразные одной функции могут отличаться только на константу. Подчеркнем, что в силу дифференцируемости первообразная всегда является непрерывной функцией.

Не всякая функция имеет первообразную в приведенном выше строгом смысле слова, потому что не всякая функция является производной от другой функции. Но если функция f, определенная на $(a; b)$, имеет на этом множестве первообразную, то она называется *интегрируемой* на нем. Расширить класс интегрируемых функций позволило введение понятия обобщенной первообразной.

Определение 1.2 (*обобщенной первообразной*). Функция F называется *обобщенной первообразной* для функции f на интервале $(a; b)$, если:

1) F непрерывна на $(a; b)$;

2) в любой точке $x \in (a; b)$, за исключением, быть может, множества точек K, функция F дифференцируема и имеет производную $F'(x)$, равную $f(x)$. При этом в случае конечного интервала $(a; b)$ множество K состоит не более чем из конечного числа точек. Если же интервал $(a; b)$ бесконечен, т. е. имеет вид $(-\infty; b)$, $(a; +\infty)$ или $(-\infty; +\infty)$, то множество K может быть счетным, но при этом каждый конечный подынтервал из $(a; b)$ не должен содержать более конечного числа точек K.

Таким образом, в отличие от определения точной первообразной, в понятии обобщенной первообразной допускается, что производная может не существовать в отдельных точках интервала интегрирования. Если нет необходимости подчерки-