В. А. Байков, А. В. Жибер

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

УЧЕБНИК И ПРАКТИКУМ
ДЛЯ АКАДЕМИЧЕСКОГО БАКАЛАВРИАТА

2-е издание, исправленное и дополненное

Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебника и практикума для студентов высших учебных заведений, обучающихся по естественнонаучным направлениям

Книга доступна в электронной библиотечной системе
biblio-online.ru

ВЫБОР РЕДАКЦИИ

Москва ▪ Юрайт ▪ 2019

УДК 53(075.8)
ББК 22.3я73
Б12

***Авторы*:**

Байков Виталий Анварович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математики общенаучного факультета Уфимского государственного авиационного технического университета;

Жибер Анатолий Васильевич — доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института математики с вычислительным центром Российской академии наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений факультета математики и информационных технологий Башкирского государственного университета, профессор кафедры математики общенаучного факультета Уфимского государственного авиационного технического университета.

***Рецензенты*:**

Булгакова Г. Т. — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики Уфимского государственного авиационного технического университета;

Хабибуллин И. Т. — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом математической физики Института математики с вычислительным центром Российской академии наук.

Байков, В. А.

Б12 Уравнения математической физики : учебник и практикум для академического бакалавриата / В. А. Байков, А. В. Жибер. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 254 с. — Серия : Бакалавр. Академический курс.

ISBN 978-5-534-02925-3

Учебник содержит курс лекций по уравнениям математической физики. В нем представлены уравнения в частных производных второго порядка с одной неизвестной функцией, в частности волновые уравнения, уравнения теплопроводности и уравнения Лапласа. Особое внимание уделяется простейшим вопросам теории интегральных уравнений и специальных функций.

Соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по естественнонаучным направлениям.

УДК 53(075.8)
ББК 22.3я73

ISBN 978-5-534-02925-3

Оглавление

Предисловие 8

I. ВВЕДЕНИЕ

Лекция 1. Основные уравнения математической физики 10
§1. Уравнение колебаний 10
§2. Уравнение диффузии..14
§3. Стационарное уравнение 15
Задачи 16

Лекция 2. Классификация уравнений в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными 18
§1. Замена независимых переменных 18
§2. Уравнения характеристик 19
§3. Канонические формы уравнения 21
Задачи 24

Лекция 3. Классификация уравнений второго порядка со многими независимыми переменными в точке. Характеристические поверхности 25
§1. Классификация уравнений в точке.............................25
§2. Характеристики 29
Задачи 31

Лекция 4. Постановка основных краевых задач для дифференциального уравнения второго порядка 31
§1. Классификация краевых задач 31
§2. Задача Коши...33
§3. Краевая задача для уравнений эллиптического типа. Смешанная задача 34
§4. Корректность постановки задач математической физики. Теорема Ковалевской. Пример Адамара 35
Задачи 38

II. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Лекция 5. Уравнение колебаний струны и его решение методом Даламбера 41
§1. Формула Даламбера...41
§2. Неоднородное уравнение. Устойчивость решений 43
§3. Метод продолжений...45
Задачи 48

Лекция 6. Метод разделения переменных на примере уравнения колебаний струны 49
§1. Уравнение свободных колебаний струны 50
§2. Неоднородное уравнение. Общая первая краевая задача 54
Задачи 56
Лекция 7. Метод Римана 57
§1. Задача Коши и ее решение по методу Римана 57
§2. Пример 62
Задачи 65
Лекция 8. Метод каскадного интегрирования Лапласа 65
§1. Преобразования неизвестной функции 66
§2. Преобразование Лапласа 69
Задачи 73
Лекция 9. Уравнения, интегрируемые каскадным методом Лапласа 74
§1. Каскад Лапласа 74
§2. Явные формулы для решений 76
§3. Уравнение Эйлера — Пуассона 77
Задачи 80
Лекция 10. Волновое уравнение. Формула Пуассона 81
§1. Частные решения 81
§2. Метод усреднения 83
Задачи 87
Лекция 11. Волновое уравнение (Метод спуска, метод отражения, формула Кирхгофа) 87
§1. Метод спуска 88
§2. Метод отражения 89
§3. Формула Кирхгофа 90
Задачи 92
Лекция 12. Колебания ограниченных объемов 93
§1. Схема метода разделения переменных 94
§2. Колебания прямоугольной мембраны 97
Задачи 100

III. УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Лекция 13. Одномерное уравнение теплопроводности. Постановка краевых задач. Принцип максимума. Теоремы единственности 101
§1. Постановка краевых задач 101
§2. Принцип максимума 104
§3. Теоремы единственности 107

Лекция 14. Метод разделения переменных для уравнения теплопроводности. Однородная краевая задача. Функция мгновенного источника. Неоднородное уравнение теплопроводности. Общая первая краевая задача 109
§1. Однородная краевая задача 109
§2. Функция мгновенного источника 112
§3. Неоднородное уравнение теплопроводности 113
§4. Общая первая краевая задача 115
Задачи 116

Лекция 15. Задачи на бесконечной прямой (Задача Коши. Краевые задачи для полуограниченной прямой) 117
§1. Задача Коши 117
§2. Краевые задачи для полуограниченной прямой 123
Задачи 124

Лекция 16. Уравнение распространения тепла в пространстве. Фундаментальное решение. Решение задачи Коши 125
§1. Фундаментальное решение 126
§2. Задачи Коши 127
Задачи 132

Лекция 17. Распространение тепла в ограниченных телах. Схема метода разделения переменных. Остывание однородного шара. Распространение тепла в прямоугольной пластинке 132
§1. Схема метода разделения переменных 133
§2. Остывание однородного шара 136
§3. Распространение тепла в прямоугольной пластинке 137
Задачи 139

IV. ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛА

Лекция 18. Уравнения Лапласа и Пуассона в пространстве. Теорема максимума. Фундаментальное решение. Формула Грина. Потенциалы объема, простого слоя и двойного слоя 140
§1. Теорема максимума 141
§2. Фундаментальное решение. Формула Грина 143
§3. Потенциалы объема, простого слоя и двойного слоя 146
Задачи 147

Лекция 19. Основные свойства гармонических функций. Теорема о среднем арифметическом. Поведение гармонической функции вблизи особой точки. Поведение гармонических функций на бесконечности 148
§1. Теорема о среднем арифметическом 148

§2. Изолированные особые точки 151
§3. Поведение гармонической функции на бесконечности 153
Лекция 20. Уравнение Пуассона в пространстве. Ньютонов потенциал 155
§1. Теорема единственности 155
§2. Построение решения уравнения Пуассона 156
Лекция 21. Решение задачи Дирихле для шара 161
§1. Функция Грина задачи Дирихле 161
§2. Решение внутренней задачи Дирихле для шара 163
Задачи 167
Лекция 22. Задачи Дирихле и Неймана для полупространства 168
§1. Теорема единственности решений задач Дирихле и Неймана 168
§2. Построение решений задач Дирихле и Неймана 171
Лекция 23. Свойства потенциалов объема, простого и двойного слоя 174
§1. Потенциал объема 175
§2. Поверхности Ляпунова 177
§3. Потенциал двойного слоя 178
§4. Потенциал простого слоя 180
Лекция 24. Сведение задач Дирихле и Неймана к интегральным уравнениям 181
§1. Постановка задач и единственность их решений 181
§2. Интегральные уравнения для краевых задач 185
Лекция 25. Уравнения Лапласа и Пуассона на плоскости 187
§1. Основные задачи 189
§2. Логарифмический потенциал 191
Задачи 194

V. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Лекция 26. Уравнения Фредгольма второго рода и Вольтерра 195
§1. Классификация интегральных уравнений 195
§2. Метод последовательных приближений. Понятие о резольвенте 196
§3. Уравнения Вольтерра 200
Задачи 201
Лекция 27. Интегральные уравнения с выраженным ядром. Теоремы Фредгольма 203
§1. Уравнения с вырожденным ядром 203
§2. Теоремы Фредгольма 208
Задачи 209

Лекция 28. Интегральные уравнения с симметричными ядрами 210
§1. Свойства собственных функций и собственных значений 211
§2. Теорема о конечном спектре 215
§3. Спектр итерированных (повторных) ядер 217
Лекция 29. Теорема Гильберта — Шмидта. 218
§1. Разложение интегрированных ядер 219
§2. Теорема Гильберта — Шмидта 221
§3. Решение неоднородного уравнения 224
Задачи 226

VI. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Лекция 30. Функции Бесселя. Полное разделение переменных в уравнении колебаний круглой мембраны 228
§1. Функции Бесселя 228
§2. Полное разделение переменных в уравнении колебаний круглой мембраны 231
Задачи 235
Лекция 31. Многочлены Лежандра. Определение потенциала внутри сферы 237
§1. Многочлены Лежандра 237
§2. Потенциал полой сферы 242
Задачи 244
Лекция 32. Сферические функции. Задача Дирихле для шара 245
§1. Определение сферических функций 245
§2. Свойство ортогональности 247
§3. Гармонические многочлены 248
§4. Задача Дирихле для шара 249
Задачи 251
Рекомендуемая литература 252
Новые издания по дисциплине «Уравнения математической физики» и смежным дисциплинам 254

Предисловие

Курс «Уравнения математической физики» является базовым университетским курсом для студентов факультета прикладной математики. Для того чтобы понять его в полной мере, необходимо знание и свободное оперирование основными понятиями дисциплин «аналитическая геометрия», «высшая алгебра» и «математический анализ», поэтому в университете он входит в программу обучения студентов в пятом и шестом семестрах третьего курса.

Отметим, что выбор материала был ограничен как объемом лекционных часов, так и желанием научить «прикладника» приемам и методам решения прикладных задач. Желающих более глубоко разобраться в предмете можно отослать к работам [1] – [9].

При подборе задач в качестве базового был взят «Сборник задач по уравнениям математической физики» под редакцией В.С. Владимирова [10], а при подготовке курса лекции мы использовали в основном книги [11] – [14].

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование элементов следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО и ОПОП ВО по данному направлению подготовки: способность понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

знать

• основные типы уравнений математической физики;

• методы точного решения базовых уравнений математической физики;

• основные типы специальных функций и способы их применения;

уметь

• решать стандартные краевые задачи для уравнения колебаний струны, волнового уравнения, уравнения теплопроводности и уравнений Лапласа и Пуассона;

владеть

• навыками решения типовых задач для основных уравнений математической физики;

• навыками работы со справочной литературой по математике.

I. Введение

Лекция 1. Основные уравнения математической физики (уравнение колебаний, уравнение диффузии, уравнения Пуассона и Лапласа)

Предмет теории уравнений математической физики составляет изучение дифференциальных, интегральных и функциональных уравнений, описывающих явления природы. Точные рамки этой дисциплины определить довольно трудно. Кроме того, большое разнообразие вопросов, относящихся к уравнениям математической физики, не позволяет охватить их сколько-нибудь полно в университетском курсе.

Наш курс будет посвящен в основном изучению уравнений в частных производных второго порядка с одной неизвестной функцией, в частности волнового уравнения, уравнения теплопроводности и уравнения Лапласа, обычно называемых классическими уравнениями математической физики.

§1. Уравнение колебаний

Многие задачи механики (колебания струн, стержней, мембран и трехмерных объемов) и физики (электромагнитные колебания) приводят к уравнению колебаний вида

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\operatorname{div}(p\ \operatorname{grad}u)-q\,u+F(x,t), \qquad (1)$$

где неизвестная функция $u(x,t)$ зависит от n $(n=1,2,3)$ пространственных переменных $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ и времени t коэффициенты ρ, p и q определяются свойствами среды; $F(x,t)$ – плотность внешнего возмущения. В уравнении (1) в соответствии с определением операторов div и grad

$$\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p\frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

Продемонстрируем вывод уравнения (1) на примере малых поперечных колебаний струны. Струной называется упругая нить, не сопротивляющаяся изгибу.

Пусть в плоскости (x,u) струна совершает малые поперечные колебания около своего положения равновесия, совпадающего с осью x. Обозначим через $u(x,t)$ величину отклонения струны от положения равновесия в точке x в момент времени t, так что $u=u(x,t)$ есть уравнение струны в момент времени t. Мы будем пренебрегать величинами высшего порядка малости по сравнению с $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

Так как струна не сопротивляется изгибу, то ее натяжение $\vec{T}(x,t)$ в точке x в момент времени t направлено по касательной к струне в точке x (Рис. 1).

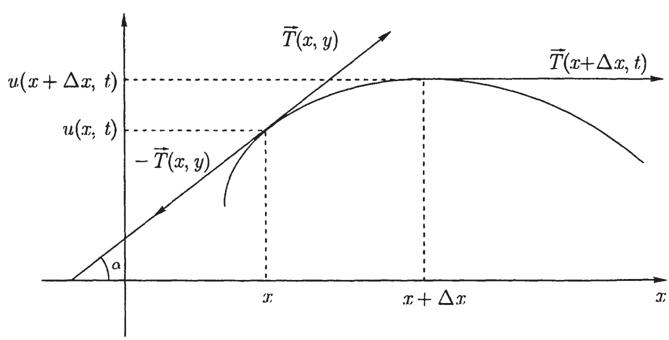

Рис. 1.

Любой участок струны (a,b) после отклонения от положения равновесия в рамках нашего приближения не изменит своей длины

$$l=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}dx\approx b-a$$

и, следовательно, в соответствии с законом Гука величина натяжения $\left|\vec{T}(x,t)\right|$ будет оставаться постоянной, не зависящей от x и t, $\left|\vec{T}(x,t)\right|=T_0$. Обозначим через $F(x,t)$ плотность внешних сил, действующих на струну в точке x в момент времени t и направленных перпендикулярно оси x. Наконец, пусть $\rho(x)$ обозначает линейную плотность струны в точке x так, что $\rho(x)dx$ – масса элементы струны $(x,x+dx)$. Составим теперь уравнение движения струны. На ее элемент $(x,x+dx)$ действуют силы натяжения $\vec{T}(x+dx,t)$, $-\vec{T}(x,t)$ (Рис.1) и внешняя сила, сумма которых, согласно законам Ньютона, должна быть равна произведению массы этого элемента на его ускорение. Проектируя это векторное равенство на ось u, получим

$$T_0\sin\alpha\Big|_{x+\Delta x}-T_0\sin\alpha\Big|_x+F(x,t)\Delta x=\rho(x)\Delta x\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2}. \qquad (2)$$

Но в рамках нашего приближения

$$\sin\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}\approx\operatorname{tg}\alpha=\frac{\partial u}{\partial x},$$

и, следовательно, из (2) имеем

$$\rho\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2}=T_0\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]+F(x,t),$$

т.е.

$$\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=T_0\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+F. \qquad (3)$$

Уравнение (3) и есть уравнение малых поперечных колебаний струны.

Если плотность ρ постоянна, $\rho(x)=\rho$, то уравнение колебаний струны принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f, \tag{4}$$

где обозначено $a^2=\frac{T_0}{\rho}$, $f=\frac{F}{\rho}$. Уравнение (4) мы будем также называть одномерным волновым уравнением.

Уравнение вида (1) описывает также малые продольные колебания упругого стержня

$$\rho S\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(E\,S\frac{\partial u}{\partial x}\right)+F(x,t), \tag{5}$$

где $S(x)$ – площадь поперечного сечения стержня и $\mathrm{E}(\mathrm{x})$ – модуль Юнга в точке x.

Аналогично, выводится уравнение малых поперечных колебаний мембраны

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)+F. \tag{6}$$

Если плотность ρ постоянна, то уравнение колебаний мембраны принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)+f, \qquad a^2=\frac{T_0}{\rho}, \quad f=\frac{F}{\rho}. \tag{7}$$

Уравнение (7) мы будем называть двумерным волновым уравнением.

Трехмерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right)+f \tag{8}$$

описывает процессы распространения звука в однородной среде и электромагнитных волн в однородной непроводящей среде. Этому уравнению удовлетворяет плотность газа, его давление и потенциал скоростей, а также составляющие напряженности электрического и магнитного полей и соответствующие потенциалы.

Мы будем записывать волновые уравнения (4), (7) и (8) единой формулой:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f,$$

где Δ – оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

§2. Уравнение диффузии

Процессы распространения тепла или диффузии частиц в среде описываются следующим общим уравнением диффузии:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - q\, u + F(x,t). \tag{9}$$

Выведем уравнение распространения тепла. Обозначим через $u(x,t)$ температуру среды в точке $x = (x_1, x_2, x_3)$ в момент времени t, а через $\rho(x)$, $c(x)$ и $k(x)$ – соответственно ее плотность, удельную плотность и коэффициент теплопроводности в точке x. Пусть $F(x,t)$ – интенсивность источников тепла в точке x в момент времени t. Подсчитаем баланс тепла в произвольном объеме V за промежуток времени $(t, t + \Delta t)$. Обозначим через S границу V, и пусть $\vec{n}$ – внешняя нормаль к ней. Согласно закону Фурье, через поверхность S в объем V поступает количество тепла

$$Q_1 = \iint_S k \frac{\partial u}{\partial n}\, dS\, \Delta t = \Delta t \iint_S (k \operatorname{grad} u, \vec{n})\, dS,$$

равное, в силу формулы Гаусса–Остроградского,

$$Q_1 = \iiint_V \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)\, dx\, \Delta t.$$

За счет тепловых источников в объеме V возникает количество тепла

$$Q_2 = \iiint_V F(x,t)\,dx\,\Delta t.$$

Так как температура в объеме V за промежуток времени $(t, t+\Delta t)$ выросла на величину

$$u(x,t+\Delta t) - u(x,t) \approx \frac{\partial u}{\partial t}\Delta t,$$

то для этого необходимо затратить количество тепла

$$Q_3 = \iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t}\,dx\,\Delta t.$$

С другой стороны, $Q_3 = Q_1 + Q_2$ и поэтому

$$\iiint_V \left[\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F - c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \right] dx\,\Delta t = 0,$$

откуда, в силу произвольности объема V, получаем уравнение распространения тепла

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F(x,t). \tag{10}$$

Если среда однородна, т.е. c, ρ и k – постоянные, то уравнение (10) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f, \tag{11}$$

где $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$, $f = \dfrac{F}{c\rho}$.

Уравнение (11) называется уравнением теплопроводности.

§3. Стационарное уравнение

Для стационарных процессов $F(x,t) = F(x)$, $u(x,t) = u(x)$ и уравнения колебаний (1) и диффузии (9) принимают вид

$$-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + q u = F(x). \tag{12}$$

При $p=\text{const}$, $q=0$ уравнение (12) называется уравнением Пуассона

$$\Delta u=-f, \qquad f=\frac{F}{p}; \tag{13}$$

при $f=0$ уравнение (13) называется уравнением Лапласа

$$\Delta u=0.$$

Рассмотрим потенциальное течение жидкости без источников, а именно, пусть внутри некоторого объема V с границей S имеет место стационарное течение несжимаемой жидкости (плотность $\rho=\text{const}$), характеризуемое скоростью $\vec{\upsilon}(x_1,x_2,x_3)$. Если течение жидкости не вихревое $(\text{rot}\,\vec{\upsilon}=0)$, то скорость $\vec{\upsilon}$ является потенциальным вектором, т.е.

$$\vec{\upsilon}=\text{grad}\,u, \tag{14}$$

где u – скалярная функция, называемая потенциалом скорости. Если отсутствуют источники, то

$$\text{div}\,\vec{\upsilon}=0. \tag{15}$$

Теперь из формул (14) и (15) получим:

$$\text{div grad}\,u=0$$

или

$$\Delta u=0,$$

т.е. потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа.

Задачи

1. Абсолютно гибкая однородная нить закреплена на одном из концов и под действием своего веса находится в вертикальном положении равновесия. Вывести уравнение малых колебаний нити.

Ответ: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial}{\partial x}\left[(l-x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]$, $a^2=g$, где $u(x,t)$ – смещение точки, l – длина нити, g – ускорение силы тяжести.

2. Вывести уравнение поперечных колебаний струны в среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости.

Ответ: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h^2 \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad a^2 = \sqrt{\dfrac{T_0}{\rho}}$.

3. Тяжелая однородная нить длины l прикреплена верхним концом $(x = 0)$ к вертикальной оси, вращается вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью ω. Вывести уравнение малых колебаний нити около своего вертикального положения равновесия.

Ответ: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\left[(l - x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right] + \omega^2 u, \quad a^2 = g$.

4. Вывести уравнение диффузии в среде, движущейся со скоростью $\upsilon(x)$ в направлении оси x, если поверхностями равной концентрации в каждый момент времени являются плоскости, перпендикулярные оси x.

Ответ: $c\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) - \dfrac{\partial}{\partial x}(\upsilon \cdot u)$.

5. Вывести уравнение диффузии в неподвижной среде для вещества, частицы которого: а) распадаются со скоростью, пропорциональной концентрации; б) размножаются со скоростью, пропорциональной их концентрации.

Ответ: а) $c\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) - \beta u$; б) $c\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + \beta u$.

6. Исходя из уравнений Максвелла в вакууме:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

где $\vec{H}$ – напряженность магнитного поля, $\vec{E}$ – напряженность электрического поля, вывести уравнение для потенциала электрического поля постоянного электрического тока и уравнение для потенциала электростатического поля.

Лекция 2. Классификация уравнений в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными

Нашей целью является приведение к каноническому виду в области уравнения с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными линейного относительно старших производных

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \tag{1}$$

где коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} являются функциями x и y.

§1. Замена независимых переменных

Перейдем от независимых переменных x и y к независимым переменным ξ и η. Пусть

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) \tag{2}$$

– дважды непрерывно дифференцируемые функции, причем якобиан

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix}$$

нигде в рассматриваемой области не обращается в нуль. Тогда систему (2) можно однозначно разрешить относительно x и y в некоторой области точек (ξ, η). Полученные функции $x = x(\xi, \eta)$ и $y = y(\xi, \eta)$ будут также дважды непрерывно дифференцируемыми функциями от ξ и η. С помощью преобразования (2) мы получаем новое уравнение, эквивалентное исходному (1). Естественно возникает задача: как выбрать ξ и η, чтобы уравнение в этих переменных имело наиболее простую форму? Для решения этой задачи преобразуем производные к новым переменным. Полагая

$$u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = \upsilon(\xi, \eta),$$

получаем

$$u_x = \upsilon_\xi \xi_x + \upsilon_\eta \eta_x, \quad u_y = \upsilon_\xi \xi_y + \upsilon_\eta \eta_y,$$

$$u_{xx} = \upsilon_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2\upsilon_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + \upsilon_{\eta\eta} \eta_x^2 + \upsilon_\xi \xi_{xx} + \upsilon_\eta \eta_{xx},$$

$$u_{xy} = \upsilon_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + \upsilon_{\xi\eta} \left(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x\right) + \upsilon_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + \upsilon_\xi \xi_{xy} + \upsilon_\eta \eta_{xy}, \tag{3}$$

$$u_{yy} = \upsilon_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2\upsilon_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + \upsilon_{\eta\eta} \eta_y^2 + \upsilon_\xi \xi_{yy} + \upsilon_\eta \eta_{yy}.$$

В новых переменных ξ и η уравнение (1), согласно формулам (3), записывается так:

$$\bar{a}_{11} \upsilon_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12} \upsilon_{\xi\eta} + \bar{a}_{22} \upsilon_{\eta\eta} + \bar{F}\left(\xi, \eta, \upsilon, \upsilon_\xi, \upsilon_\eta\right) = 0, \tag{4}$$

где

$$\bar{a}_{11} = a_{11} \xi_x^2 + 2a_{12} \xi_x \xi_y + a_{22} \xi_y^2,$$

$$\bar{a}_{12} = a_{11} \xi_x \eta_x + a_{12} \left(\xi_x \eta_y + \eta_x \xi_y\right) + a_{22} \xi_y \eta_y,$$

$$\bar{a}_{22} = a_{11} \eta_x^2 + 2a_{12} \eta_x \eta_y + a_{22} \eta_y^2,$$

$$\bar{F} = F + a_{11}\left(\upsilon_\xi \xi_{xx} + \upsilon_\eta \eta_{xx}\right) + 2a_{12}\left(\upsilon_\xi \xi_{xy} + \upsilon_\eta \eta_{xy}\right) + a_{22}\left(\upsilon_\xi \xi_{yy} + \upsilon_\eta \eta_{yy}\right).$$

Выберем переменные ξ и η так, чтобы коэффициент $\bar{a}_{11}$ был равен нулю. Рассмотрим уравнение с частными производными первого порядка

$$a_{11} z_x^2 + 2a_{12} z_x z_y + a_{22} z_y^2 = 0. \tag{5}$$

Пусть $z = \varphi(x, y)$ – какое-нибудь частное решение этого уравнения. Если положить $\xi = \varphi(x, y)$, то коэффициент $\bar{a}_{11}$, очевидно, будет равен нулю. Итак, задача о выборе новых независимых переменных связана с решением уравнения (5).

§2. Уравнения характеристик

Уравнение (5) связано со следующим обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dx\, dy + a_{22} dx^2 = 0, \tag{6}$$

которое мы будем называть характеристическим, а его интегралы – характеристиками. Эта связь устанавливается в следующем предложении:

Лемма. *Если* $z=\varphi(x,y)$ *– решение уравнения* (5), *то соотношение* $\varphi(x,y)=C$ *представляет собой интеграл уравнения* (6). *Обратно, если* $\varphi(x,y)=C$ *– интеграл уравнения* (6), *то функция* $z=\varphi(x,y)$ *удовлетворяет уравнению* (5).

Доказательство. Пусть $z=\varphi(x,y)$ удовлетворяет уравнению (5). Соотношение $\varphi(x,y)=C$ задает функцию $y=f(x,C)$, для которой

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\varphi_x(x,y)}{\varphi_y(x,y)}\bigg|_{y=f(x,C)}.$$

Следовательно, $y=f(x,C)$ удовлетворяет уравнению (6), так как

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a_{12}\frac{dy}{dx}+a_{22}=\left[a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2+2a_{12}\frac{\varphi_x}{\varphi_y}+a_{22}\right]_{y=f(x,C)}=0.$$

Докажем вторую часть леммы. Пусть $\varphi(x,y)=C$ – интеграл уравнения (6). Через произвольную точку (x_0,y_0) проведем интегральную кривую уравнения (6), полагая $\varphi(x_0,y_0)=C_0$ и $y=f(x,C_0)$. Очевидно, $y_0=f(x_0,C_0)$. Для всех точек этой кривой имеем:

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a_{12}\frac{dy}{dx}+a_{22}=\left[a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2+2a_{12}\frac{\varphi_x}{\varphi_y}+a_{22}\right]_{y=f(x,C_0)}=0.$$

Полагая в последнем равенстве $x=x_0$, получим:

$$a_{11}\varphi_x^2(x_0,y_0)+2a_{12}\varphi_x(x_0,y_0)\varphi_y(x_0,y_0)+a_{22}\varphi_y^2(x_0,y_0)=0,$$

что и требовалось доказать.

Полагая $\xi=\varphi(x,y)$, где $\varphi(x,y)=C$ есть интеграл уравнения (6), мы обращаем в нуль коэффициент при $\upsilon_{\xi\xi}$. Если $\psi(x,y)=C$ – другой интеграл уравнения (6), независимый от $\varphi(x,y)$, то, полагая $\eta=\psi(x,y)$, мы обратим в нуль также и коэффициент при $\upsilon_{\eta\eta}$.

Уравнение (6) распадается на два уравнения:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \tag{7}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \tag{8}$$

Знак подкоренного выражения определяет тип уравнения (1). Это уравнение мы будем называть в точке M уравнением гиперболического типа, если в точке M $\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0$, эллиптического типа, если $\Delta<0$, и параболического типа, если $\Delta=0$.

Нетрудно убедиться в правильности соотношения

$$\bar{a}_{12}^2-\bar{a}_{11}\bar{a}_{22}=\left(a_{12}^2-a_{11}a_{22}\right)D^2,$$

из которого следует инвариантность типа уравнения при преобразовании переменных, так как якобиан D преобразования переменных отличен от нуля.

§3. Канонические формы уравнения

Рассмотрим область G, во всех точках которой уравнение имеет один и тот же тип. Разберем каждый из этих типов в отдельности.

1. Для уравнения гиперболического типа $\Delta>0$ и правые части уравнений (7) и (8) действительны и различны. Общие интегралы их $\varphi(x,y)=C$ и $\psi(x,y)=C$ определяют действительные семейства характеристик. Полагая

$$\xi=\varphi(x,y),\quad \eta=\psi(x,y), \tag{9}$$

приводим уравнение (4) к виду

$$\upsilon_{\xi\eta}=\Phi\left(\xi,\eta,v,v_\xi,v_\eta\right), \tag{10}$$

где $\Phi=-\dfrac{\overline{F}}{2\bar{a}_{12}}$. Уравнение (10) называется канонической формой гиперболического уравнения (1). Часто пользуются другой канонической формой. Положим

$$\xi=x'+y',\quad \eta=x'-y',$$

т.е.

$$x' = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad y' = \frac{\xi - \eta}{2},$$

где x' и y' – новые переменные. Тогда, полагая $\upsilon(\xi,\eta) = W(x',y')$, будем иметь

$$\upsilon_\xi = \frac{1}{2}\left(W_{x'} + W_{y'}\right), \quad \upsilon_\eta = \frac{1}{2}\left(W_{x'} - W_{y'}\right), \quad \upsilon_{\xi\eta} = \frac{1}{4}\left(W_{x'x'} - W_{y'y'}\right).$$

В результате уравнение (10) примет вид

$$W_{x'x'} - W_{y'y'} = \Phi_1 \quad (\Phi_1 = 4\Phi).$$

2. Для уравнения параболического типа $\Delta = 0$ уравнения (7) и (8) совпадают, и мы получаем один общий интеграл уравнения (6): $\varphi(x,y) = \text{const}$. Положим в этом случае

$$\xi = \varphi(x,y) \text{ и } \eta = \psi(x,y),$$

где $\psi(x,y)$ – любая функция, независимая от φ. При таком выборе переменных коэффициент

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = \left(\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y\right)^2 = 0,$$

так как $a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$; отсюда следует, что

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}\left(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y\right) + a_{22}\xi_y\eta_y =$$
$$= \left(\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y\right)\left(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y\right) = 0.$$

Таким образом, мы получаем каноническую форму для уравнения параболического типа

$$\upsilon_{\eta\eta} = \Phi\left(\xi,\eta,\upsilon,\upsilon_\xi,\upsilon_\eta\right), \quad \Phi = -\frac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}}.$$

3. Для уравнения эллиптического типа $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ и правые части уравнений (7) и (8) комплексны. Пусть

$$\varphi(x,y) = C$$

– комплексный интеграл уравнения (7). Тогда

$$\varphi^*(x,y) = C,$$

где φ^* – сопряженная к φ функция, будет представлять собой общий интеграл сопряженного уравнения (8). При этом уравнение эллиптического типа (1) приводится к (10) при замене переменных

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \varphi^*(x, y).$$

Чтобы не иметь дела с комплексными переменными, введем новые переменные x' и y', равные

$$x' = \frac{\varphi + \varphi^*}{2}, \quad y' = \frac{\varphi - \varphi^*}{2i},$$

так, что

$$\xi = x' + iy', \quad \eta = x' - iy'.$$

В этом случае, полагая $\upsilon(\xi, \eta) = W(x', y')$, будем иметь

$$\upsilon_\xi = \frac{1}{2}\left(W_{x'} - iW_{y'}\right), \quad \upsilon_\eta = \frac{1}{2}\left(W_{x'} + iW_{y'}\right), \quad \upsilon_{\xi\eta} = \frac{1}{4}\left(W_{x'x'} + W_{y'y'}\right).$$

Следовательно, уравнение (10) принимает вид

$$W_{x'x'} + W_{y'y'} = \Psi\left(x', y', W, W_{x'}, W_{y'}\right), \quad \Psi = 4\Phi.$$

В заключение рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. $u_{xx} - yu_{yy} = 0$.

Здесь $a_{11} = 1, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = -y, \quad \Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = y$. Следовательно, в области $y > 0$ уравнение гиперболично, в области $y < 0$ – эллиптично.

а) Рассмотрим сначала область гиперболичности. Дифференциальные уравнения характеристик имеют вид

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{y}, \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{y},$$

а $x - 2\sqrt{y} = C, \quad x + 2\sqrt{y} = C$ – их общие интегралы.

Производя замену независимых переменных $\xi = x - 2\sqrt{y}, \ \eta = x + 2\sqrt{y}$, получим каноническую форму преобразованного уравнения

$$u_{\xi\eta} = \frac{1}{2(\xi - \eta)}\left(u_\eta - u_\xi\right).$$

б) В области эллиптичности $(y<0)$ производим замену переменных

$$x' = \frac{\xi+\eta}{2} = x, \quad y' = \frac{\eta-\xi}{2i} = 2\sqrt{-y}\,.$$

Канонический вид уравнения

$$W_{x'x'} + W_{y'y'} - \frac{1}{2\sqrt{-y}} W_{y'} = 0\,.$$

Пример 2. $xu_{xx} - 2\sqrt{xy}u_{xy} + yu_{yy} + 0{,}5\,u_y = 0$.

Здесь $a_{11} = x$, $a_{12} = -\sqrt{xy}$, $a_{22} = y$, $\Delta \equiv 0$. Следовательно, это уравнение всюду параболического типа. Оно имеет одно семейство характеристик, описываемых уравнением

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{y}{x}}\,.$$

Общий интеграл этого уравнения $\sqrt{x}+\sqrt{y}=C$. Поэтому полагаем $\xi = \sqrt{x}+\sqrt{y}$, η можно положить равной любой функции $\psi(x,y)$, независимой от ξ. Полагаем, например, $\eta = \sqrt{x}$. Тогда получаем следующий канонический вид уравнения

$$u_{\eta\eta} - \frac{1}{\eta}\left(u_\xi + u_\eta\right) = 0\,.$$

Задачи

1. Привести к каноническому виду уравнения:

а) $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$,

б) $y^2 u_{xx} + x^2 u_{yy} = 0$,

в) $x^2 u_{xx} + 2xy\,u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$,

г) $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$.

2. Введя функцию $\upsilon = u e^{\lambda x + \mu y}$ и выбирая параметры λ и μ, упростить следующие уравнения:

а) $u_{xx} + u_{yy} + 3u_x - 5y + 4u = 0$,

б) $u_{xx} + 4u_x - u_y + u = 0$,

в) $u_{xx} - u_{yy} + 4u_x + 4u_y - 2u = 0$.

Лекция 3. Классификация уравнений второго порядка со многими независимыми переменными в точке. Характеристические поверхности

Прежде чем формулировать математические постановки решения различных физических задач, сводящихся к линейным дифференциальным второго порядка относительно старших производных, необходимо классифицировать эти уравнения.

В случае уравнений с двумя независимыми переменными этот вопрос исследован на предыдущей лекции. В этой лекции рассматриваются уравнения вида

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi(x, u, \nabla u) = 0 \qquad (1)$$

с непрерывными коэффициентами $a_{ij}(x)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

§1. Классификация уравнений в точке

Выясним, как преобразуется уравнение (1) при произвольной невырожденной замене независимых переменных $\xi = \xi(x)$, т.е.

$$\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \; i = 1, 2, \ldots, n;$$