И. В. Садовничая, Е. В. Хорошилова

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ: ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Часть 2

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ АКАДЕМИЧЕСКОГО БАКАЛАВРИАТА

2-е издание, переработанное и дополненное

Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по математическим и естественнонаучным направлениям

Книга доступна в электронной библиотечной системе
biblio-online.ru

Москва ▪ Юрайт ▪ 2019

УДК 517.9(075.8)
ББК 22.161я73
С14

***Авторы*:**

Садовничая Инна Викторовна — доцент, доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова;

Хорошилова Елена Владимировна — доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

***Рецензенты*:**

Ильин В. А. — доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН, Международной академии наук высшей школы; лауреат Государственной премии СССР и Премии Президента Российской Федерации в области образования;

Фоменко Т. Н. — доктор физико-математических наук;

Фомичев В. В. — профессор, доктор физико-математических наук, заместитель заведующего кафедрой нелинейных динамических систем и процессов управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова;

Соколов Н. В. — доктор физико-математических наук.

Садовничая, И. В.

С14 Математический анализ: определенный интеграл. В 2 ч. Часть 2 : учеб. пособие для академического бакалавриата / И. В. Садовничая, Е. В. Хорошилова. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 199 с. — (Серия : Бакалавр. Академический курс).

ISBN 978-5-534-06672-2 (ч. 2)
ISBN 978-5-534-05716-4

Настоящее издание (1-е изд. — 2008 г.) посвящено теоретическим и практическим аспектам вычисления определенных интегралов, а также методам их оценок, свойствам и приложениям к решению различных геометрических и физических задач.

Часть 1 содержит разделы, посвященные определению, свойствам и методам вычисления собственных интегралов, свойствам несобственных интегралов. Часть 2 включает геометрические и физические приложения определенного интеграла, а также некоторые обобщения интеграла Римана — интегралы Лебега и Стилтьеса.

Изложение теоретического материала подкреплено большим количеством (более 220) разобранных примеров вычисления, оценок и исследования свойств определенных интегралов. В конце каждой главы приводятся задачи для самостоятельного решения (более 640, подавляющее большинство — с решениями). Цель пособия — помочь студенту во время прохождения темы «Определенный интеграл» на лекциях и практических занятиях. К пособию студент может обратиться для получения справочной информации по возникшему вопросу. Книга также может быть полезна преподавателям и всем желающим изучить данную тему достаточно подробно и широко.

Соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования.

Для студентов университетов, в том числе математических специальностей, изучающих интегральное исчисление в рамках курса математического анализа.

УДК 517.9(075.8)
ББК 22.161я73

ISBN 978-5-534-06672-2 (ч. 2)
ISBN 978-5-534-05716-4

Оглавление

Глава 5
ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

5.1. Плоская фигура и связанные с ней понятия

Приведем некоторые определения из теории множеств, имеющие отношение к данной главе.

Пусть на плоскости задана декартова (прямоугольная) система координат. Обозначим через $\mathbb{R}^2$ множество всех точек плоскости. Пусть точка $M(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Назовем ε-*окрестностью* точки M множество тех точек плоскости, которые расположены внутри круга радиусом ε с центром в точке M, т. е. множество

$$U_\varepsilon(M) = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2\}.$$

Пусть P — произвольное непустое подмножество $\mathbb{R}^2$. Точка $M \in P$ называется *внутренней* точкой множества P, если существует число $\varepsilon > 0$, такое что $U_\varepsilon(M) \subset P$. Точка M называется *внешней* точкой множества P, если существует число $\varepsilon > 0$, такое что $U_\varepsilon(M) \in \mathbb{R}^2 \setminus P$. Точку M назовем *граничной точкой* множества P, если эта точка не является ни внутренней, ни внешней точкой множества P[1]. Совокупность всех граничных точек множества P называется его *границей*.

Множество $P \subset \mathbb{R}^2$ называется *открытым*, если все его точки — внутренние. Множество $P \subset \mathbb{R}^2$ называется *замкнутым*, если множество $\mathbb{R}^2 \setminus P$ открыто. Множество $P \subset \mathbb{R}^2$ называется *ограниченным*, если существует число $R > 0$, такое что $P \subset U_R(O)$, где O — точка с координатами $(0; 0)$.

Многоугольной фигурой на плоскости назовем множество, составленное из конечного числа лежащих в этой плоскости ограниченных многоугольников (понятия многоугольника, а также его площади вводились в курсе средней школы).

Плоской фигурой назовем любое непустое ограниченное множество $P \subset \mathbb{R}^2$. Две фигуры P_1 и P_2 называются *равными*, если существует взаимно однозначное соответствие с сохранением расстояния между точками, при котором фигура P_1 отображается на P_2.

---

[1] Заметим, что точка M является *граничной точкой* множества P тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ в ε-окрестности точки M содержатся как точки, принадлежащие множеству P, так и точки, ему не принадлежащие.

5.2. Квадрируемая фигура и ее площадь

Обозначим символом $S(P)$ площадь многоугольной фигуры P.

Напомним, что площадь многоугольной фигуры — это неотрицательное число, удовлетворяющее следующим свойствам[1].

1. (*Инвариантность*). Если две многоугольные фигуры P_1 и P_2 равны между собой, то $S(P_1)=S(P_2)$.

2. (*Аддитивность*). Если P_1 и P_2 — две многоугольные фигуры без общих внутренних точек и символ $P_1 \cup P_2$ обозначает объединение этих фигур, то $S(P_1 \cup P_2)=S(P_1)+S(P_2)$.

3. (*Существование единицы*). Площадь квадрата со стороной, равной единице измерения длины, равна единице измерения площади.

Последнее свойство означает, что величина площади фигуры существенным образом зависит от выбора единицы измерения в рассматриваемой системе координат.

Введем понятие площади для произвольной плоской фигуры F. Рассмотрим для этого всевозможные многоугольные фигуры P, целиком содержащиеся в F, и многоугольные фигуры Q, целиком содержащие F. Фигуры P будем называть *вписанными* в F, а фигуры Q — *описанными* около F.

Числовое множество $\{S(P)\}$ площадей всех вписанных многоугольных фигур P ограничено сверху, например площадью любой описанной многоугольной фигуры Q. Поэтому это множество имеет конечную точную верхнюю грань $\underline{S}=\sup\limits_{P\subseteq F} S(P)$, которую будем называть *нижней площадью* фигуры F. Если в фигуру F нельзя вписать ни одного многоугольника, то по определению полагается $\underline{S}=0$.

Аналогично числовое множество $\{S(Q)\}$ площадей всех описанных около фигуры F многоугольных фигур Q ограничено снизу, например площадью любой вписанной многоугольной фигуры или нулем, и поэтому у него существует конечная точная нижняя грань $\overline{S}=\inf\limits_{Q\supseteq F} S(Q)$, называемая *верхней площадью* фигуры F. Очевидно, что $\underline{S}\leq \overline{S}$.

Плоская фигура F называется *квадрируемой* (т. е. *имеющей конечную площадь*), если $\underline{S}=\overline{S}$. Число $S=\underline{S}=\overline{S}$ называется при этом *площадью* фигуры F (по Жордану).

Будем говорить, что плоская фигура F имеет *площадь, равную нулю*, если эта фигура содержится в многоугольной фигуре сколь угодно малой площади.

Перечисленные выше свойства многоугольных фигур (неотрицательность, аддитивность, инвариантность, существование единицы) сохраняются и для произвольных квадрируемых фигур. При этом доказательство свойства аддитивности в случае, когда квадрируе-

[1] *Погорелов А. В.* Геометрия : учебник для 7—11 классов средней школы. 2-е изд. М. : Просвещение, 1991. С. 216.

мые фигуры имеют общие точки (принадлежащие границе каждой из них), не является тривиальным; оно будет приведено ниже (см. теорему 5.4).

Замечание 5.1. Подчеркнем, что свойство аддитивности выполняется для объединения любого *конечного числа* $F_1, F_2, ..., F_n$ квадрируемых фигур без общих внутренних точек: $S(F) = \sum_{i=1}^{n} S(F_i)$, но уже объединение *счетной* совокупности квадрируемых фигур не является, вообще говоря, квадрируемой фигурой.

Например, рассмотрим множество F всех точек с рациональными координатами, принадлежащих квадрату $[0,1]\times[0,1]$. Оно представляет собой счетное объединение квадрируемых фигур (точка, очевидно, является квадрируемой фигурой нулевой площади). С другой стороны, верхняя площадь данной фигуры $\overline{S}(F) = 1$, поскольку наименьшим многоугольником, содержащим множество F, является сам квадрат $[0,1]\times[0,1]$; нижняя же площадь $\underline{S}(F) = 0$, поскольку в множество F нельзя вписать никакую многоугольную фигуру ненулевой площади. Это означает, что фигура F не является квадрируемой.

Замечание 5.2. Непустое пересечение двух квадрируемых фигур есть квадрируемая фигура.

Замечание 5.3. Понятие квадрируемости допускает обобщение на случай *неограниченных фигур* на плоскости.

Пусть F — неограниченная плоская фигура и $R > 0$ — действительное число. Обозначим $F_R = U_R(O) \cap F$ (всегда можно выбрать такое достаточно большое R, чтобы $F_R \neq \varnothing$). Пусть для любого такого R ограниченная фигура F_R квадрируема в смысле введенного выше определения. Если существует конечный предел $S = \lim\limits_{R\to+\infty} S(F_R)$, то назовем фигуру F *квадрируемой* (*в несобственном смысле*), а число S — ее площадью. При вычислении площадей таких фигур с помощью определенных интегралов будем получать сходящиеся несобственные интегралы 1-го или 2-го рода (см. примеры 5.5—5.7 ниже).

5.3. Необходимые и достаточные условия квадрируемости. Классы квадрируемых фигур

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 5.1 (необходимое и достаточное условие квадрируемости). *Для того чтобы плоская фигура F была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы ее граница имела площадь нуль.*

Доказательству этой теоремы предпошлем две вспомогательные леммы.

Лемма 5.1. Плоская фигура F квадрируема тогда и только тогда, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся многоугольная фигура $P \subset F$ и многоугольная фигура $Q \supset F$, такие что $S(Q) - S(P) < \varepsilon$.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть фигура F квадрируема, тогда $\underline{S}(F)=\overline{S}(F)$. По определению точной грани, для любого числа $\varepsilon>0$ найдется многоугольная фигура $P\subset F$, такая что

$$\underline{S}(F)-\frac{\varepsilon}{2}<S(P)\leq\underline{S}(F).$$

Аналогично найдется многоугольная фигура $Q\supset F$, такая что

$$\overline{S}(F)\leq S(Q)<\overline{S}(F)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $\underline{S}(F)=\overline{S}(F)=S(F)$, то, учитывая полученные неравенства, имеем

$$S(F)-\frac{\varepsilon}{2}<S(P)\leq S(Q)<S(F)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Значит, $S(Q)-S(P)<\varepsilon$.

Теперь докажем достаточность. Пусть для любого числа $\varepsilon>0$ найдутся многоугольные фигуры $P\subset F$ и $Q\supset F$, такие что $S(Q)-S(P)<\varepsilon$. Так как $S(P)\leq\underline{S}(F)\leq\overline{S}(F)\leq S(Q)$, то $0\leq\underline{S}(F)-\overline{S}(F)\leq S(Q)-S(P)<\varepsilon$.

Но число $\varepsilon>0$ произвольно, значения верхней и нижней площади фигуры F от него не зависят, значит, $\underline{S}(F)=\overline{S}(F)$.

Лемма 5.1 доказана.

Лемма 5.2. Плоская фигура F квадрируема тогда и только тогда, когда для любого числа $\varepsilon>0$ найдутся квадрируемая фигура $P\subset F$ и квадрируемая фигура $Q\supset F$, такие что $S(Q)-S(P)<\varepsilon$.

Доказательство. Необходимость сразу следует из леммы 5.1, так как любая многоугольная фигура является квадрируемой. Докажем достаточность. Пусть для любого числа $\varepsilon>0$ найдутся квадрируемые фигуры $P\subset F$ и $Q\supset F$, такие что $S(Q)-S(P)<\frac{\varepsilon}{2}$.

Так как фигуры P и Q квадрируемы, то для них согласно предыдущей лемме найдутся многоугольные фигуры P' и Q', такие что $P'\subset P$, $Q'\supset Q$, причем

$$S(P)-S(P')<\frac{\varepsilon}{4},\ S(Q')-S(Q)<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Тогда $P'\subset F\subset Q'$ и

$$S(Q')-S(P')<S(Q)+\frac{\varepsilon}{4}-S(P)+\frac{\varepsilon}{4}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Отсюда и из леммы 5.1 следует, что фигура F квадрируема. Лемма 5.2 доказана.

Доказательство теоремы 5.1. Пусть P, Q — произвольные многоугольные фигуры, такие что $P\subset F\subset Q$. Поскольку у многоугольной фигуры площадь границы равна нулю, можем без ограничения общности считать, что фигура Q содержит все свои граничные точки, а фигура P не содержит ни одной своей граничной точки. Напомним, что для многоугольных фигур справедливо свойство аддитивности площади: $S(Q \setminus P) = S(Q) - S(P)$. Необходимость условия теоремы 5.1 вытекает теперь из того факта, что многоугольная фигура $Q \setminus P$ содержит все точки границы ∂F плоской фигуры F (см. лемму 5.1).

Докажем достаточность. Впишем фигуру F в квадрат I со сторонами, параллельными осям координат. Пусть h — достаточно малое положительное число. Разобьем квадрат I на более мелкие квадраты I_h со сторонами, равными h. Выберем $\varepsilon > 0$. Пусть граница ∂F плоской фигуры F содержится в многоугольной фигуре с площадью, меньшей ε. Покажем, что в этом случае существует число $h > 0$, такое что ∂F содержится также в некотором объединении квадратов I_h, общая площадь которых меньше, чем 32ε.

Действительно, заметим, что любая многоугольная фигура, площадь которой меньше ε, представляет собой сумму конечного числа треугольников, не имеющих общих внутренних точек; каждый такой треугольник равен объединению двух прямоугольных треугольников без общих внутренних точек; каждый прямоугольный треугольник содержится в прямоугольнике, вдвое большем его по площади; каждый прямоугольник содержится в объединении конечного числа квадратов, суммарная площадь которых не более чем в два раза превышает площадь этого прямоугольника; каждый квадрат этого объединения содержится во вдвое большем его квадрате со сторонами, параллельными осям координат.

Таким образом, любая многоугольная фигура, площадь которой меньше ε, содержится в конечном объединении квадратов со сторонами, параллельными координатным осям, с общей площадью, меньшей 8ε. Из указанного конечного набора квадратов выберем квадрат с наименьшей стороной и возьмем в качестве числа h половину длины стороны этого квадрата. При таком выборе h каждый указанный квадрат (со сторонами, параллельными осям координат) будет содержаться в конечном объединении квадратов I_h, общая площадь которых не превышает учетверенной площади этого квадрата.

Значит, вся многоугольная фигура с площадью, меньшей ε, содержится в конечном объединении квадратов I_h, суммарная площадь которых меньше, чем 32ε.

Для завершения доказательства заметим, что объединение всех квадратов I_h, состоящих только из внутренних точек фигуры F, представляет собой многоугольную фигуру P, причем $P \subset F$, а объединение этой фигуры P с теми квадратами I_h, которые содержат точки границы ∂F фигуры F, представляет собой многоугольную фигуру Q, такую что $Q \supset F$; при этом $S(Q) - S(P) < 32\varepsilon$. Отсюда и из леммы 5.1 вытекает утверждение теоремы.

Теорема полностью доказана.

Следствие. Площадь квадрируемой фигуры равна одному и тому же числу, независимо от того, с границей или без границы рассматривается эта фигура.

Теорема 5.2 (необходимое и достаточное условие квадрируемости). *Для того чтобы плоская фигура F была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие две последовательности многоугольных фигур $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$, соответственно содержащихся в F и содержащих в себе F, площади которых имели бы общий предел*

$$\lim_{n\to+\infty} S(A_n)=\lim_{n\to+\infty} S(B_n)=S(F).$$

Доказательство этой теоремы приведено в учебнике [18, гл. X, параграф 2]. Оно также легко может быть получено из доказанных выше лемм 5.1 и 5.2.

Теорема 5.3 (достаточное условие квадрируемости). *Для того чтобы плоская фигура была квадрируемой, достаточно, чтобы ее граница была спрямляемой*[1] *кривой.*

Доказательство. Сначала докажем вспомогательную лемму.

Лемма 5.3. Всякая спрямляемая кривая имеет площадь нуль.

Доказательство. Пусть L — спрямляемая кривая, а $|L|$ — ее длина. Разобьем эту кривую $n+1$ точками $x_0,\ldots,x_n$ на n частей, каждая из которых имеет длину $\frac{|L|}{n}$. Примем каждую из точек x_j за центр квадрата со стороной $\frac{2|L|}{n}$. Объединение этих квадратов представляет собой многоугольную фигуру, описанную около кривой L. Площадь этой фигуры, очевидно, равна $\frac{4|L|^2}{n^2}(n+1)$. Так как число $|L|$ фиксировано, а n можно сделать сколь угодно большим, то верхняя площадь фигуры L равна нулю. Значит, кривая L имеет нулевую площадь. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 5.3 теперь сразу следует из леммы 5.3 и теоремы 5.1.

Теперь мы можем доказать свойство аддитивности площади квадрируемой фигуры.

Теорема 5.4. *Пусть F_1 и F_2 — квадрируемые фигуры без общих внутренних точек, F — их объединение. Тогда фигура F квадрируема, причем $S(F)=S(F_1)+S(F_2)$.*

Доказательство. Квадрируемость фигуры F следует из теоремы 5.1 и того факта, что граница ∂F фигуры F имеет площадь нуль, так как она является частью объединения границ ∂F_1 и ∂F_2 фигур F_1 и F_2.

Докажем справедливость равенства $S(F)=S(F_1)+S(F_2)$. Рассмотрим многоугольные фигуры P_1, P_2, Q_1, Q_2, такие что $P_1\subset F_1\subset Q_1$, $P_2\subset F_2\subset Q_2$. Обозначим $P=P_1\cup P_2$, $Q=Q_1\cup Q_2$. Так как фигуры P_1 и P_2 не имеют общих внутренних точек, то площадь многоугольной фигуры P можно пред-

---

[1] Определение *спрямляемой* (т. е. имеющей конечную длину) кривой см. в параграфе 6.2.

ставить в виде $S(P)=S(P_1)+S(P_2)$. Фигуры Q_1 и Q_2 могут пересекаться, поэтому можем утверждать лишь, что $S(Q)\le S(Q_1)+S(Q_2)$. Значит,

$$S(P)=S(P_1)+S(P_2)\le S(F)\le S(Q)\le S(Q_1)+S(Q_2).$$

С другой стороны, в силу определения квадрируемости для фигур F_1 и F_2 справедливы неравенства

$$S(P_1)\le S(F_1)\le S(Q_1),\, S(P_2)\le S(F_2)\le S(Q_2),$$

из которых следует, что

$$S(P_1)+S(P_2)\le S(F_1)+S(F_2)\le S(Q_1)+S(Q_2).$$

Таким образом, обе величины $S(F)$ и $S(F_1)+S(F_2)$ заключены между числами $S(P_1)+S(P_2)$ и $S(Q_1)+S(Q_2)$, разница между которыми

$$(S(Q_1)+S(Q_2))-(S(P_1)+S(P_2))=(S(Q_1)-S(P_1))+(S(Q_2)-S(P_2))$$

может быть сделана сколь угодно малой. Это означает, что указанные величины равны между собой. Теорема 5.4 полностью доказана.

Приведенные теоремы описывают достаточно широкий класс квадрируемых фигур. Выделим две основные группы квадрируемых фигур, чаще других встречающиеся при решении задач на вычисление площадей.

1. Если плоская фигура F ограничена несколькими *непрерывными* кривыми, каждая из которых определяется явным уравнением $y=y(x)$ или $x=x(y)$, то эта фигура квадрируема.

2. Если плоская фигура F ограничена одной или несколькими *гладкими*[1] кривыми, то она квадрируема.

5.4. Площадь в декартовых координатах

Рассмотрим практический вопрос о вычислении площадей плоских фигур при помощи обычных определенных интегралов[2]. Обратимся к наиболее типичным случаям.

5.4.1. Кривая, ограничивающая плоскую фигуру, задана явно

1. *Фигура задана стандартно относительно оси Ox.*

Рассмотрим фигуру F в системе прямоугольных координат Oxy, ограниченную сверху графиком заданной на отрезке $[a,b]$ непрерывной

---

[1] Назовем кривую, заданную параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $t \in [T_0, T]$, *гладкой*, если: 1) функции x и y имеют непрерывные производные на всем промежутке изменения параметра; 2) на кривой нет ни кратных, ни вообще особых точек (см. [12, с. 441]).

[2] Площади плоских фигур могут быть вычислены также при помощи *двойных интегралов* (см., например, [19, гл. XVI, параграф 1]).

и неотрицательной функции $y=y(x)$, слева и справа — прямыми $x=a$ и $x=b$ и снизу — отрезком оси Ox между точками a и b. Эту фигуру будем называть *криволинейной трапецией, прилежащей к оси* Ox; ее можно задать как множество точек плоскости

$$F=\{(x;y)\,|\,a\le x\le b; 0\le y\le y(x)\}.$$

Теорема 5.5. *Криволинейная трапеция F, прилежащая к оси Ox, представляет собой квадрируемую фигуру, площадь которой вычисляется по формуле*

$$S(F)=\int_a^b y(x)\,dx. \tag{5.1}$$

Доказательство. Так как функция y непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на этом отрезке. Значит, для любого числа $\varepsilon>0$ существует разбиение $T=\{x_0;x_1;\ldots;x_n\}$ отрезка $[a,b]$, такое что $S(T)-s(T)<\varepsilon$, где $S(T)$, $s(T)$ — соответственно верхняя и нижняя суммы Дарбу для функции y, отвечающие разбиению T (критерий Римана интегрируемости функции на отрезке).

Рассмотрим многоугольные фигуры P и Q, состоящие из прямоугольников со сторонами $[x_{k-1},x_k]$, $[0,\inf\limits_{x_{k-1}\le x\le x_k} y(x)]$ и $[x_{k-1},x_k]$, $[0,\sup\limits_{x_{k-1}\le x\le x_k} y(x)]$, $k=1,\ldots,n$, соответственно. Тогда очевидно, что $P\subset F\subset Q$, причем $S(P)=s(T)$, $S(Q)=S(T)$. Значит, $S(Q)-S(P)<\varepsilon$, т. е. фигура F квадрируема (лемма 5.1). С другой стороны, так как $s(T)\le\int_a^b y(x)dx\le S(T)$ и $S(P)\le S(F)\le S(Q)$, то получаем, что для любого $\varepsilon>0$ выполнено

$$\left|S(F)-\int_a^b y(x)dx\right|<\varepsilon.$$

Так как площадь фигуры и интеграл от функции y по отрезку $[a,b]$ — числа, не зависящие от выбора ε, то из последнего неравенства следует, что $S(F)=\int_a^b y(x)dx$. Теорема доказана.

Следствие 1. Если функция y на отрезке $[a,b]$ не сохраняет постоянного знака, принимая как положительные, так и отрицательные значения, то указанный интеграл равен алгебраической сумме площадей (т. е. взятых с определенным знаком) криволинейных трапеций, расположенных выше и ниже оси Ox между точками a и b. При этом площади первых берутся со знаком «плюс», а вторых — со знаком «минус». Для рис. 5.1 получаем

$$\int_a^b y(x)dx=S_1-S_2+S_3$$

(при этом $\int\limits_a^b |y(x)|dx = S_1 + S_2 + S_3$). Это вытекает из того, что графики функций y и $|y|$ на участках отрицательности функции y симметричны друг другу относительно оси абсцисс.

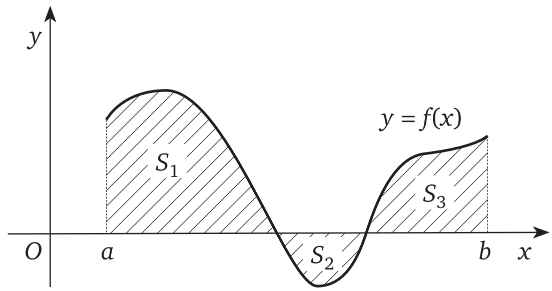

Рис. 5.1

Следствие 2. Рассмотрим теперь криволинейную трапецию более общего вида, а именно, ограниченную снизу и сверху графиками непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций y_1 и y_2, таких что $y_1(x) \le y_2(x)$ при $x \in [a,b]$. Такую фигуру также будем относить к заданным стандартно относительно оси Ox; ее можно описать как следующее множество:

$$F = \{(x;y) \mid a \le x \le b; y_1(x) \le y \le y_2(x)\}.$$

Площадь указанной криволинейной трапеции вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_a^b (y_2(x) - y_1(x))dx. \tag{5.2}$$

2. *Фигура задана стандартно относительно оси Oy*.

Криволинейной трапецией, прилежащей к оси Oy, назовем фигуру, ограниченную справа графиком заданной на отрезке $[c,d]$ непрерывной и неотрицательной функции $x = x(y)$, снизу и сверху — прямыми $y = c$ и $y = d$, слева — отрезком оси Oy между точками c и d. Такую криволинейную трапецию можно описать как множество

$$F = \{(x;y) \mid c \le y \le d; 0 \le x \le x(y)\}.$$

Теорема 5.6. *Криволинейная трапеция F, прилежащая к оси Oy, представляет собой квадрируемую фигуру, площадь которой вычисляется по формуле*

$$S(F) = \int\limits_c^d x(y)dy. \tag{5.1$'$}$$

Доказательство этого факта полностью аналогично доказательству теоремы 5.5.

Для криволинейной трапеции в случае ее прилегания к оси ординат справедливы следствия, аналогичные приведенным выше следствиям 1 и 2.

Рассмотрим примеры.

Пример 5.1

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками степенных функций $y = x^{\alpha}$ и $x = y^{\alpha}$ $(\alpha \geq 1)$ (рис. 5.2).

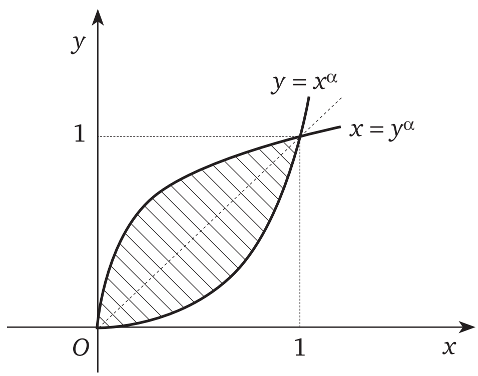

Рис. 5.2

Решение. Поскольку фигура симметрична относительно биссектрисы первого координатного угла, то ее площадь может быть получена посредством вычитания из единицы (площади квадрата) удвоенной площади криволинейной трапеции, прилежащей к оси Ox и ограниченной сверху графиком функции $y = x^{\alpha}$, $\alpha \geq 1$, $x \in [0,1]$. По формуле (5.1) имеем

$$S = 1 - 2\int_0^1 x^{\alpha} dx = 1 - 2\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \text{ (кв. ед.).}$$

Пример 5.2

Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = (x-1)^2$ и гиперболой $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ (рис. 5.3).

Решение. Найдем точки пересечения параболы и гиперболы:

$$x^2 - \frac{(x-1)^4}{2} = 1 \Leftrightarrow (x-1)(x-3)(x^2+1) = 0.$$

Таким образом, кривые пересекаются в точках $(1;0)$ и $(3;4)$. Далее задачу можно решать двумя способами.

1-й способ. Рассмотрим данную фигуру как заданную стандартно относительно оси Ox. Определяем, что сверху фигура ограничена кривой $y = \sqrt{2(x^2-1)}$, а снизу — кривой $y = (x-1)^2$, $x \in [1,3]$, т. е. фигуру можно описать как множество

$$F = \left\{(x;y) \mid 1 \leq x \leq 3; (x-1)^2 \leq y \leq \sqrt{2(x^2-1)}\right\}.$$

Следовательно, ее площадь может быть вычислена по формуле (5.2):

$$S=\int_1^3\left(\sqrt{2\left(x^2-1\right)}-(x-1)^2\right)dx=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x\sqrt{x^2-1}-\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right)\Big|_1^3-\frac{1}{3}\left(x-1^3\right)\Big|_1^3=$$

$$=\frac{10}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(3+\sqrt{8}\right)\text{(кв. ед.)}.$$

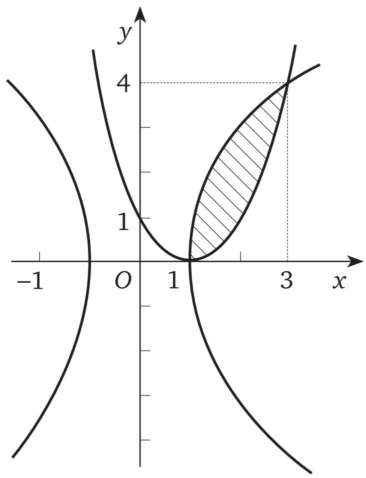

Рис. 5.3

2-й способ. С другой стороны, эту же фигуру можно рассмотреть как заданную стандартно относительно оси Oy. Действительно, она ограничена слева кривой $x=\sqrt{\frac{y^2}{2}+1}$, справа — кривой $x=1+\sqrt{y}$, $y\in[0,4]$, т. е. представляет собой множество

$$F=\left\{(x;y)\,|\,0\le y\le 4;\sqrt{\frac{y^2}{2}+1}\le x\le 1+\sqrt{y}\right\},$$

и поэтому площадь фигуры можно вычислить по формуле

$$S=\int_0^4\left(\sqrt{y}+1-\sqrt{\frac{y^2}{2}+1}\right)dy=$$

$$=\left(\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}+y-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{y}{2}\sqrt{y^2+2}+\ln\left|y+\sqrt{y^2+2}\right|\right)\right)\Bigg|_0^4=$$

$$=\frac{10}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(3+\sqrt{8}\right)\text{(кв. ед.)}.$$

---

3. Если фигура не относится к рассмотренным случаям стандартного расположения относительно координатных осей, то в большинстве случаев ее удается разбить на части, каждая из которых представляет собой стандартную область.

Пример 5.3

Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=2x/\pi$ $(x\in[0,\pi/2])$, $y=\sin x$ $(x\in[\pi/2,\pi])$ и осью абсцисс (рис. 5.4).

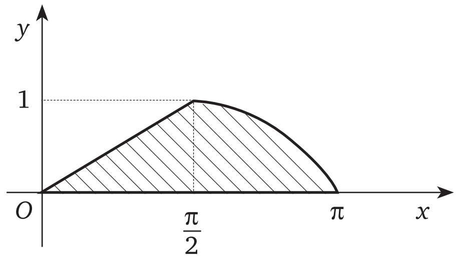

Рис. 5.4

Решение. 1-й способ. Данная фигура не является стандартной относительно оси Ox, однако ее можно разбить на две стандартные относительно оси Ox области:

$$F_1=\left\{(x;y)\,|\,0\le x\le\frac{\pi}{2};0\le y\le\frac{2x}{\pi}\right\},$$

$$F_2=\left\{(x;y)\,|\,\frac{\pi}{2}\le x\le\pi;0\le y\le\sin x\right\}.$$

Тогда площадь фигуры равна сумме площадей фигур F_1 и F_2:

$$S=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2x}{\pi}dx+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x dx=\frac{1}{\pi}(x^2)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\cos x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{\pi}{4}+1 \text{ (кв. ед.)}.$$

2-й способ. Фигура является стандартной относительно оси Oy и может быть задана как следующее множество:

$$F=\left\{(x;y)\,|\,0\le y\le 1;\frac{\pi y}{2}\le x\le\pi-\arcsin y\right\}.$$

В результате задача сводится к вычислению определенного интеграла

$$S=\int\limits_0^1\left((\pi-\arcsin y)-\frac{\pi y}{2}\right)dy=$$

$$=\left(\pi y-y\arcsin y-\sqrt{1-y^2}-\frac{\pi y^2}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{4}+1 \text{ (кв. ед.)}.$$

Пример 5.4

Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $x^2+2ax-y^2=0$ и $ax-y^2+$ $+2a^2=0$ $(a>0)$ (рис. 5.5).

Решение. 1-й способ. Данная фигура не является стандартной относительно оси Ox, но ее можно разбить на три стандартные относительно оси Ox области:

$$F_1=\left\{(x;y)\,|\,-2a\le x\le 0;-\sqrt{2a^2+ax}\le y\le\sqrt{2a^2+ax}\right\},$$

$$F_2=\left\{(x;y)\,|\,0\le x\le a;\sqrt{x^2+2ax}\le y\le\sqrt{2a^2+ax}\right\},$$

$$F_3=\left\{(x;y)\,|\,0\le x\le a;-\sqrt{2a^2+ax}\le y\le-\sqrt{x^2+2ax}\right\}.$$

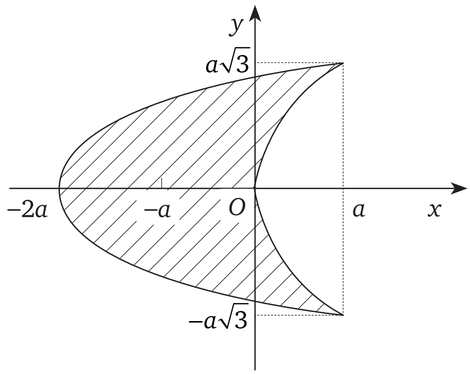

Рис. 5.5

Из симметрии фигуры относительно оси Ox ясно, что ее площадь S есть удвоенная площадь фигуры, являющейся объединением двух стандартных относительно оси Ox фигур

$$\tilde{F}_1 = \left\{(x;y)\,|\,-2a \le x \le 0; 0 \le y \le \sqrt{2a^2+ax}\right\} \text{ и } F_2.$$

Отсюда

$$S = 2\left(\int_{-2a}^{0}\sqrt{2a^2+ax}\,dx + \int_{0}^{a}\left(\sqrt{2a^2+ax}-\sqrt{x^2+2ax}\right)dx\right) =$$

$$= 2\left[\frac{2}{3a}\left(ax+2a^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-2a}^{a} - \left(\frac{x+a}{2}\sqrt{x^2+2ax}\right)\Big|_{0}^{a} +\right.$$

$$\left.+\frac{a^2}{2}\ln\left(x+a+\sqrt{x^2+2ax}\right)\Big|_{0}^{a}\right] = 2a^2\sqrt{3}+a^2\ln\left(2+\sqrt{3}\right) \text{(кв. ед.)}.$$

2-й способ. Однако проще было в данной задаче сразу рассмотреть фигуру как стандартную относительно оси Oy:

$$F = \left\{(x;y)\,|\,-a\sqrt{3} \le y \le a\sqrt{3}; \frac{y^2-2a^2}{a} \le x \le -a+\sqrt{y^2+a^2}\right\}.$$

Снова используя симметрию, получаем

$$S = 2\int_{0}^{a\sqrt{3}}\left(\sqrt{y^2+a^2}-a-\frac{y^2}{a}+2a\right)dy =$$

$$= 2a^2\sqrt{3}+\left(y\sqrt{y^2+a^2}+a^2\ln\left|y+\sqrt{y^2+a^2}\right|-\frac{2y^3}{3a}\right)\Big|_{0}^{a\sqrt{3}} =$$

$$= 2a^2\sqrt{3}+a^2\ln\left(2+\sqrt{3}\right) \text{(кв. ед.)}.$$

Рассмотрим примеры на вычисление площадей неограниченных плоских фигур.

Пример 5.5

Найти площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми $y = \dfrac{a^3}{a^2+x^2}$, $y=0$ $(a>0)$ (рис. 5.6).