А. В. Ястребов

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ НАЧАЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ С МЕТОДИКОЙ ПРЕПОДАВАНИЯ. ЗАДАЧИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ СПО

2-е издание, исправленное и дополненное

Рекомендовано Учебно–методическим отделом среднего профессионального образования в качестве учебного пособия для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования

Книга доступна в электронной библиотечной системе biblio-online.ru

Москва ▪ Юрайт ▪ 2018

УДК 372.851(075.32)
ББК 74.262.21я723
Я85

***Автор*:**

Ястребов Александр Васильевич — кандидат физико-математических наук, доктор педагогических наук, профессор кафедры математического анализа, теории и методики обучения математике физико-математического факультета Ярославского государственного педагогического университета имени К. Д. Ушинского.

***Рецензенты*:**

кафедра общей математики Ярославского государственного университета имени П. Г. Демидова;

Трошина Т. Л. — доцент, кандидат физико-математических наук.

Ястребов, А. В.

Я85 Теоретические основы начального курса математики с методикой преподавания. Задачи : учеб. пособие для СПО / А. В. Ястребов. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 201 с. — (Серия : Профессиональное образование).

ISBN 978-5-534-09576-0

В учебном пособии представлены математические задачи, которые помогут студентам изучить понятийный аппарат и методологические принципы теории и методики обучения математике. В пособие включены авторские комментарии к отдельным задачам и группам задач, которые способствуют лучшему усвоению материалов книги.

Соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования и профессиональным требованиям.

Для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования.

УДК 372.851(075.32)
ББК 74.262.21я723

ISBN 978-5-534-09576-0

Содержание

Предисловие

Перед читателем лежит книга, стиль которой можно трактовать различными способами. По своей общей, грубой структуре это сборник задач со всеми его характерными признаками: краткими теоретическими введениями к каждому из разделов, заданиями, идущими под номерами, ответами или решениями. Однако более тонкие структурные элементы заставляют уточнить первоначальное впечатление. Прежде всего, это авторские комментарии двух сортов к группам задач или даже к отдельным задачам. Предварительный комментарий вскрывает причины, заставившие автора обратиться к данным задачам, а завершающий комментарий описывает те качественные, идейные следствия, которые вытекают из полученного результата и анализа процесса решения. Кроме того, в книге содержится раздел «Идеи, советы, намеки», в который помещена информация, облегчающая последующее решение, но не дающая полного решения. Две эти черты роднят данную книгу с учебниками по общей методике, хотя она не является учебником и не претендует на это. Наконец, удачно подобранные эпиграфы к разделам настраивают на высокий научный лад, как если бы перед читателем лежало сочинение по философии математики.

Согласимся, однако же, с первым впечатлением и будем считать, что перед нами сборник задач. Тогда станет понятной необычность и, в некотором смысле, дерзость замысла автора, который попытался соединить трудно соединимое: вопросы общей методики и тренировочные упражнения по этому разделу. Действительно, среди многих прекрасных книг по общей методике практически нет сборников задач. Есть основания считать, что данная книга заполнит существенную часть этого пробела, поскольку ее тренировочное начало выражено достаточно сильно. Так, у читателя есть возможность выполнить более семи десятков упражнений на обобщение и конкретизацию. Анализируя процесс решения школьных задач, читатель увидит, что индукции и дедукция неотделимы друг от друга, равно как неотделимы друг от друга анализ и синтез. Тем самым положения общей методики будут выявлены в процессе личной деятельности студента.

Сочинение по общей методике неизбежно апеллирует к школьной математике, т. е. к той области, которая известна или должна быть известна всем. Искусство автора состоит в том, что он умеет ставить в этой области несложные, но психологически трудные вопросы. Например, оказывается, что студентам трудно найти такое свойство параллельных прямых, которое не было бы достаточным условием параллельности. Вообще следует сказать, что за текстом книги (задачника!) ощущается личность автора. Быть может, синтетический стиль книги как раз и обусловлен тем, что автор пытался на немногих страницах выразить квинтэссенцию своего педагогического опыта. Удалось это или нет, полезен ли такой опыт — судить читателю. С моей точки зрения, хорошо, что такая книга написана, и я с удовольствием представляю ее педагогическому сообществу.

Профессор А. Г. Мордкович

Введение

Решение задач является наиболее характерной и специфической разновидностью свободного мышления.
Уильям Джеймс

При переходе от изучения математики к изучению методики обучения математике студент сталкивается с двумя обстоятельствами, которые существенно усложняют процесс освоения материала. Прежде всего, происходит, образно говоря, глобализация той «элементной базы», на основе которой ведутся рассуждения. Действительно, понятия и факты конкретной математической дисциплины используются при изучении других математических дисциплин не столь уж активно. Например, сколь бы важным ни было понятие определенного интеграла, оно не встретится студенту ни при изучении проективной геометрии, ни при изучении теории чисел. Аналогично, алгоритм Евклида не входит в курсы математического анализа и геометрии, и список таких примеров можно существенно расширить. Приступая к изучению общей методики, студент попадает в принципиально иную ситуацию, поскольку вынужден находить проявления общих явлений и закономерностей *во всей математике*, а не в отдельных математических дисциплинах. Более того, он вынужден обнаруживать их как в вузовской, так и в школьной математике.

Второй причиной, вызывающей трудности в обучении, является новый уровень абстрагирования, более высокий по сравнению с привычным. Действительно, изучая, например, математический анализ, студент абстрагируется от содержания ряда конкретных *физических задач* и извлекает из них ту сущность, которая приводит его к понятию производной. Изучая алгебру, студент абстрагируется от свойств конкретных *бинарных операций* и извлекает из них ту сущность, которая приводит его к понятию группы. Приступая к изучению общей методики математики, студент вынужден абстрагироваться от *матема-*

тических свойств привычных рассуждений и извлекать из них ту сущность, которая приводит его к общим понятиям индукции и дедукции, анализа и синтеза, обобщения и конкретизации и т. д. К тому же, и в этом третья причина, новые понятия теряют свою определенность по сравнению с математическими понятиями именно в силу своей общности. Например, студенту поначалу достаточно трудно разделить некоторые понятия, например неполную индукцию, аналогию, обобщение.

По мнению автора, все вышесказанное позволяет утверждать, что понятийный аппарат общей методики математики имеет иную природу по сравнению с понятийным аппаратом математики, следовательно, процесс формирования методических понятий должен отличаться от процесса формирования понятий математических. Тем не менее, у этих двух процессов есть много общего. Действительно, освоить абстрактные понятия с помощью широкой элементной базы можно только в том случае, когда студенту предоставлена возможность получить большой *личный опыт* работы с этими понятиями. Недостаточно услышать на лекции рассказ о том, что такое, например, обобщение; нужно, чтобы студент *несколько раз* самостоятельно обобщил какие-либо свойства математических объектов. Недостаточно прочитать в книге описание того, что такое, например, рассуждение по аналогии; нужно, чтобы студент *несколько раз* самостоятельно провел рассуждения по аналогии на основании рассмотрения некоторых примеров, сформулировав гипотезу и проверив ее истинность. Попросту говоря, студент должен *решить* большое количество задач по общей методике математики. Именно необходимость *решения задач* является общим свойством двух родственных процессов: изучения математики и изучении методики математики.

Очевидно, что для методического обеспечения курса общей методики математики должен быть создан соответствующий задачник. Идея эта отнюдь не нова, однако до сих пор не существует задачника по общей методике, сравнимого по объему и по «степени канонизации» с задачниками по математике. Опишем кратко принципы построения данного задачника, которые и определили его особенности.

Принцип универсальности математической базы методических задач состоит в том, что элементной базой для упражнений по общей методике служат как содержание школьной программы, так и содержание программы для педагогических ссузов и вузов за первые 2—3 года обучения. Реализация этого принципа позволяет решить одновременно несколько педагогических задач. Во-первых, в процессе выполнения заданий по общей методике происходит обобщающее повторение математического материала как по элементарной, так и по высшей математике. Во-вторых, у студентов формируется представление о единстве математики на всех ее «этажах» и о тесной связи между математикой и методикой ее преподавания. В-третьих, данный подход может быть использован в процессе подготовки преподавателей в стенах классического университета.

Принцип моделирования элементов исследовательской деятельности в учебном процессе состоит в том, что подлежащие усвоению положения методики выявляются студентом в результате методико-математического анализа условий и (или) решений математических задач. Для реализации этого принципа пришлось формулировать задания или группы заданий таким образом, чтобы они заведомо были *двухкомпонентными* и включали в себя как математическую, так и методическую части. В ряде случаев, когда математическая часть задания оказывалась сложной и не оставляла студенту достаточно времени для методического анализа, автор приводил полное решение математической задачи с тем, чтобы студент сконцентрировался на методическом компоненте задания. В результате существенная, если не большая, часть заданий приобрела *бифункциональный* характер, т. е. оказалась пригодной к использованию при изучении как математических, так и методических дисциплин.

Принцип единства банка упражнений и методики его использования в идеале состоит в том, что задачник по учебной дисциплине должен быть описанием методики изучения этой дисциплины на практических занятиях, включающим в себя, в качестве составной части, собственно банк упражнений. В данной книге этот принцип реализован следующим образом. Во-первых, группы задач или отдельные задачи сопровождаются авторскими комментариями. Комментарий, *предваряющий* группу задач, дает краткое описание объектов, которым посвящена эта группа, или целей изучения данной группы, или общего угла зрения, под которым целесообразно рассматривать данную группу, и т. п. Соответствующие абзацы набраны курсивом и отмечены слева вертикальной чертой. Комментарий, *завершающий* группу задач, описывает качественные результаты, полученные в процессе решения, а также возможные методы использования этих задач в педагогическом процессе. Некоторые из таких комментариев касаются математических или педагогических особенностей данной группы, а также возможностей постановки новых задач, связанных с изученными задачами. Соответствующие абзацы набраны курсивом. Во-вторых, в пособии содержится необычный раздел «Идеи, советы, намеки». В соответствии с названием в нем содержится информация, облегчающая последующее решение: удобные обозначения, или основная идея, или первый шаг решения, и т. п., однако в нем нет полных решений. Решения, если они необходимы по тем или иным причинам, приведены в разделе «Ответы и решения».

Наличие комментариев, дополнительного раздела «Идеи…» и достаточного количества решений позволяет работать с книгой различными способами. Опытный преподаватель может читать только тексты задач, выбирая те из них, которые полезны для организуемого им процесса обучения студентов. Менее опытный преподаватель имеет «опору» в виде предварительных и завершающих комментариев, а также в виде идей решений и ответов. Студент может использовать книгу почти как учебник: прочесть предварительный комментарий и текст задачи, сделать попытку самостоятельного решения, в случае неудачи воспользоваться подсказкой из раздела «Идеи…», сверить полученный результат с разделом «Ответы…» и, наконец, прочесть завершающий комментарий, осуществляя тем самым педагогическую и (или) математическую рефлексию. Для студента педагогического учебного заведения данная последовательность действий представляется вполне естественной.

Одна из особенностей данного учебного пособия состоит в том, что оно может быть использовано не только в процессе подготовки учителя, но и в его послевузовской деятельности. Действительно, некоторые педагогические идеи, заложенные в книге, могут способствовать обогащению того списка сценариев, которые использует учитель в своей работе. Например, идея бифункциональности заданий может трактоваться учителем самыми разными способами, поскольку решаемые школьником задачи помимо своей основной функции — способствовать освоению математики — могут выполнять и другие функции: способствовать освоению математической логики, физики и т. п. Другая идея, реализуемая в пособии, также может оказаться близкой многим учителям. Это идея накопления: задач различной идейной направленности, математических методов решения задач, педагогических методов работы с задачами и проч. Наконец, к пособию можно подойти чисто утилитарно и использовать содержащиеся в нем математические задачи в процессе работы со школьниками.

Известно, что одним из свойств науки является ее личностно-социальный дуализм: с одной стороны, каждый результат изобретается конкретным исследователем, а с другой стороны, этот результат становится фактом науки только в процессе принятия его научным сообществом. Отражением этого обстоятельства в процессе преподавания может служить стремление преподавателя к двум взаимно дополняющим друг друга целям. С одной стороны, он должен стараться персонифицировать опыт своих учеников, что выражается, в частности, в предоставлении студентам индивидуально подобранных задач. С другой стороны, нужно стремиться, образно говоря, к «трехсубъектности» процесса преподавания, понимая под субъектами преподавателя, студента и *студенческую группу* в целом. Было бы естественным, чтобы часть информации была усвоена студенческим сообществом в результате коллективной деятельности: конкретный студент осваивает то или иное положение методики в процессе решения задач и объясняет его группе в целом. В этом случае личностно-социальный дуализм науки, а значит и научная деятельность в целом, был бы проиллюстрирован в процессе преподавания. Надеемся, что данный задачник будет способствовать достижению этой цели.

Книга предназначена для студентов колледжей — будущих учителей математики и всех желающих освоить методический компонент курса математики.

В результате изучения курса студент должен освоить:

трудовые действия

- владения основными образовательными технологиями;
- методикой изучения основных дидактических единиц — понятия, теоремы, задачи и системы задач, урока;
- методикой планирования и конструирования различных педагогических сценариев;

необходимые умения

- применять общенаучные методы исследования в области ТМОМ;

- ориентироваться в многообразии достижений современной методики и выбирать адекватные методы для решения возникающих перед ним конкретных проблем;
- работать с учебной и научной литературой на бумажных и электронных носителях;

необходимые знания

- объекта изучения и предмета изучения теории и методики обучения математике (ТМОМ);
- понятийного аппарата и методологических принципов ТМОМ;
- содержания важнейших современных концепций математического образования.

Приношу искреннюю благодарность Т. М. Кориковой за интерес к общему замыслу книги, психологическую поддержку и многочисленные полезные советы.

1. СРАВНЕНИЕ

Сравнение — это мыслительная операция, метод познания, состоящий в установлении сходных/различных свойств в предметах и явлениях.

Глубокое, полноценное сравнение объектов должно выявлять как сходные, так и различные свойства объектов, те и другие в возможно большем количестве.

Нахождение признаков сходства сравниваемых объектов называется ***сопоставлением***, а нахождение признаков различия — ***противопоставлением***.

Во всех нижеследующих задачах предлагается сравнить два-три математических объекта: числа, алгебраические операции, функции, геометрические фигуры и т. д. При решении целесообразно делать акцент на неочевидном: если сравниваемые объекты очень похожи, то надо концентрироваться на поиске отличий, а если они заведомо сильно отличаются друг от друга, то полезно выявить их общие свойства.

Первые семь задач относятся к числам и операциям над ними.

1.1. Сравните между собою рациональное и иррациональное число.

1.2. Сравните между собою множество рациональных чисел и множество иррациональных чисел.

1.3. Сравните между собою две алгебраические операции: сложение на множестве натуральных чисел и сложение на множестве целых чисел.

1.4. Сравните между собою две алгебраические операции: 1) сложение и умножение вещественных чисел; 2) сложение и вычитание вещественных чисел.

1.5. Теорию квадратных уравнений можно строить в трех различных ситуациях: 1) над полем рациональных чисел; 2) над полем вещественных чисел; 3) над полем комплексных чисел. Сравните эти теории.

1.6. Теорию уравнений вида $ax = b$ можно строить в трех различных ситуациях: 1) над множеством целых чисел; 2) над множеством рациональных чисел; 3) над множеством вещественных чисел. Сравните эти теории.

Обратите внимание на одну тонкость: в данной задаче мы говорим об «уравнениях вида $ax = b$», а в предыдущей задаче — о «квадратных уравнениях». Чем вызвано такое различие в формулировках?

1.7. Сравните систему рациональных чисел ($\boldsymbol{Q}$, $+$, $\cdot$, $\leq$) с системой вещественных чисел ($\boldsymbol{R}$, $+$, $\cdot$, $\leq$).

Задачи 1.8—1.11 посвящены «родственным» операциям на множествах различной природы, а также согласованию операций и отношений.

1.8. Сравните две операции: 1) сложение вещественных чисел и сложение вещественных функций вещественного аргумента; 2) умножение вещественных чисел и умножение вещественных функций вещественного аргумента; 3) деление вещественных чисел и деление вещественных функций вещественного аргумента.

1.9. Сравните две операции: 1) умножение матриц порядка n и умножение всюду определенных функций; 2) умножение матриц порядка n и композицию всюду определенных функций.

1.10. Рассмотрим две алгебры: ($\boldsymbol{R}$, $+$, $\cdot$) и ($\boldsymbol{R}[x]$, $+$, $\circ$), где $\boldsymbol{R}[x]$ — множество многочленов с вещественными коэффициентами, а $\circ$ — операция композиции. В одинаковой ли мере согласованы операции в этих алгебрах?

1.11. На множестве комплексных чисел можно ввести так называемый лексикографический порядок $<$ следующим образом: $a+bi<c+di \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<c \\ \begin{cases} a=c \\ b<d \end{cases} \end{array}\right.$. Далее, как обычно, можно ввести нестрогий лексикографический порядок $\leq$ следующим способом: $z<u \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z<u \\ z=u \end{array}\right.$. Сравните построенное отношение нестрогого лексикографического порядка на множестве комплексных чисел со стандартным отношением порядка $\leq$ на множестве вещественных чисел.

Итак, построенный лексикографический порядок действительно является порядком, причем согласованным с операцией сложения на множестве комплексных чисел. Более того, для *него справедлива аксиома существования разделяющего числа (докажите!). К сожалению, он не согласован с операцией умножения. По-видимому, это единственная причина, в силу которой лексикографический порядок не обладает интересными свойствами.*

Задача 1.12 стоит особняком.

1.12. Сравните операции объединения и пересечения множеств с операциями дизъюнкции и конъюнкции высказываний.

Очень большое количество общих свойств для рассматриваемых пар операций наводит на мысль о том, что мы встретили два частных примера алгебр особого типа. Так и есть на самом деле.

Следующие шесть задач относятся к области математического анализа.

1.13. Сравните четную и нечетную функции.

1.14. Сравните множество четных функций с множеством нечетных функций.

1.15. Число $x = 0$ является точкой локального минимума для следующих трех функций: $y = x^2$, $y = \sqrt[3]{x^2}$, $y = |x|$. Сравните свойства этих функций и их графиков в окрестности точки экстремума.

1.16. Сравните три теоремы: 1) о пределе суммы двух функций; 2) о непрерывности суммы двух функций; 3) о производной суммы двух функций.

1.17. Сравните три теоремы: 1) о пределе произведения двух функций; 2) о непрерывности произведения двух функций; 3) о производной произведения двух функций.

1.18. Сравните три теоремы: 1) о пределе частного двух функций; 2) о непрерывности частного двух функций; 3) о производной частного двух функций.

Из девяти теорем, фигурирующих в задачах 1.16—1.18, можно образовывать другие группы и сравнивать теоремы внутри них. Естественно добавить к этому списку теоремы о непрерывности композиции функций и о производной композиции.

Две следующие задачи относятся к векторной алгебре.

1.19. Сравните попарно три правила сложения векторов: 1) правило треугольника; 2) правило середины; 3) правило параллелограмма.

1.20. Сравните между собой двумерное и трехмерное пространства.

Оставшиеся задачи раздела относятся к области элементарной геометрии. Первые три из них касаются сравнения свойств фигур.

1.21. Сравните между собой две геометрические фигуры, каждая из которых состоит из двух прямых: параллельные прямые и скрещивающиеся прямые.

1.22. Сравните между собой две геометрические фигуры: окружность и пару параллельных прямых.

1.23. Сравните между собой треугольник и трапецию.

Решение задачи показывает, что совершенно разные на первый взгляд фигуры обладают довольно длинным списком общих свойств. Это лишний раз показывает, что противоположные процедуры — сопоставление и противопоставление — являются неотъемлемыми частями единой процедуры сравнения.

Следующие три задачи посвящены традиционному материалу — взаимному расположению геометрических фигур.

1.24. Сравните взаимные расположения двух пар геометрических фигур: прямой и окружности, с одной стороны, и прямой и треугольника, с другой стороны.

1.25. Сравните взаимные расположения двух пар геометрических фигур: прямой и окружности, с одной стороны, и прямой и гиперболы, с другой стороны.

1.26. Сравните случаи расположения прямой относительно *невырожденной* кривой второго порядка со случаями расположения прямой относительно *вырожденной* кривой второго порядка.

В заключительной задаче мы хотим показать, что могут существовать различные точки зрения на типологию математических объектов, более конкретно, на типологию четырехугольников.

1.27. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, и точка X движется по лучу $[AD)$.

Сравните свойства фигур $ABCD$ и $ABCX$.

Решение задачи показывает, что при движении точки X целый ряд важных свойств ***трапеции*** *ABCX оказывается справедливым для* ***параллелограмма*** *ABCD, который соответствует особому положению X = D движущейся точки. Не является ли это основанием рассматривать параллелограмм как особый вид трапеции, подобно тому, как мы рассматриваем равнобедренный треугольник как особый вид треугольника?*

2. ИНДУКЦИЯ И ДЕДУКЦИЯ

Какова природа умозаключения в математике? Действительно ли она дедуктивна, как думают обыкновенно? Более глубокий анализ показывает нам, что это не так, — что в известной мере ей свойственна природа индуктивного умозаключения и потому-то она столь плодотворна. Но от этого она не теряет своего характера абсолютной строгости…

А. Пуанкаре, «О науке»

Дедукция — логическое умозаключение от общего к частному, от общих суждений к частным или другим общим выводам. *Дедуктивный метод* — способ исследования, изложения, при котором частные положения логически выводятся из общих положений (из аксиом, постулатов, правил, законов).

Индукция — логическое умозаключение от частных, единичных случаев к общему выводу, от отдельных фактов к обобщениям. *Индуктивный метод* — способ исследования, изложения, при помощи которого от наблюдений частных фактов, от экспериментальных данный переходят к установлению общих положений, принципов и законов.

Неполная индукция — умозаключение, логический прием мышления, в результате которого информация о *некоторых* элементах множества распространяется на *все* элементы множества или на множество *в целом*.

Полная индукция — умозаключение, логический прием, при котором вывод о свойствах множества *в целом* делается на основании рассмотрения *всех* элементов множества.

Принцип математической индукции. Пусть дана последовательность математических утверждений $P(1)$, $P(2)$, …, $P(n)$, …, занумерованных натуральным параметром n. Пусть эта последовательность обладает двумя свойствами:

1) для некоторого r утверждение $P(r)$ истинно;

2) для любого натурального $n \geq r$ из истинности утверждений $P(k)$ при $r \leq k \leq n$ следует истинность утверждения $P(n+1)$.

Тогда утверждения $P(n)$ верны при всех $n \geq r$.

Задачи 2.1—2.4 несут методологическую нагрузку, поскольку иллюстрируют роль и взаимодействие индукции и дедукции в математике. При их рассмотрении целесообразно использовать один из следующих сценариев. ***Сценарий 1****. Распределите задачи 2.1—2.3 среди трех микрогрупп студентов, добейтесь полного решения, организуйте сообщения представителей микрогрупп о полученных результатах, а затем обратитесь к задаче 2.4, в которой предлагается проанализировать математическую деятельность по решению задач путем ответа на вопросы общего, идейного характера.* ***Сценарий 2****. Рассмотрите задачи парами: 2.1 и 2.4, 2.2 и 2.4, 2.3 и 2.4. Решение первой задачи из пары представляет собой математическую деятельность, а решение второй — анализ математической деятельности с более общих позиций.*

2.1. *Выявите* общие свойства следующих функций:

$$f_1(x)=\frac{1}{x},\ f_2(x)=x^3,\ f_3(x)=\sin x,\ f_4(x)=\mathrm{sh}(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}),$$

$$f_5(x)=\mathrm{sgn}\,x=\left[\begin{array}{l}1,\ x>0\\ 0,\ x=0\\ -1,\ x<0\end{array}\right..$$

Вычислите производные этих функций и *выясните*, обладают ли они каким-либо общим свойством. *Сформулируйте* гипотезу и *докажите* ее истинность.

Читая условие задачи, обратите внимание на глаголы, выделенные курсивом. Они указывают на те разнообразные умственные действия, которые придется выполнить при решении этой математической задачи. Интересно, что «доказывание», столь характерное для математики, является ***последним*** *этапом решения задачи, причем, как вы увидите, не самым трудным.*

2.2. *Выявите* общие свойства следующих функций:

$$f_1(x)=\frac{1}{x^4},\ f_2(x)=x^2,\ f_3(x)=\cos x,\ f_4=|x|,\ f_5(x)=\Delta(x)=\left[\begin{array}{l}1,\ x=0\\ 0,\ x\neq 0\end{array}\right..$$

Вычислите производные этих функций и *выясните*, обладают ли они каким-либо общим свойством. *Сформулируйте* гипотезу и *докажите* ее истинность.

См. завершающий комментарий к задаче 2.1.

2.3. *Выявите* общие свойства следующих функций: $f_1(x)=\cos x$, $f_2(x)=\operatorname{tg}2x$, $f_3(x)=\sin 3x$, $f_4(x)=\text{const}$, $f_5(x)=\{x\}$ — дробная часть числа *x*. *Вычислите* производные этих функций и *выясните*, обладают ли они каким-либо общим свойством. *Сформулируйте* гипотезу и *докажите* ее истинность.

См. завершающий комментарий к задаче 2.1.

2.4. Какого типа умозаключения, индуктивные или дедуктивные, выполняются в процессе решения задач 2.1—2.3? Если выполняются умозаключения обоих типов, то на каком этапе решения делается каждое из них?

Результат решения данной задачи иллюстрирует тот факт, что математике присущ так называемый ***индуктивно-дедуктивный дуализм****. Это означает, что природа умозаключения в математике является одновременно и индуктивной, и дедуктивной. Интуиция, основанная на индуктивных умозаключениях, служит средством первичного получения результата, а логика, основанная на дедукции, служит средством его строгого обоснования.*

Две следующие задачи не затрагивают понятий индукции и дедукции, поэтому они не относятся, строго говоря, к основному содержанию данного раздела. Тем не менее, они выявляют еще два дуалистических свойства математики, так что их рассмотрение в сочетании с задачей 2.4 вполне естественно.

2.5. В результате решения задач 2.1—2.3 в соответствии со сценарием 1 (см. вступительный комментарий к задаче 2.1) академическая группа студентов усвоила несколько теорем: а) производная четной функции является нечетной; б) производная нечетной функции является четной; в) производная периодической функции является периодической; г) при дифференцировании периодической функции ее период сохраняется. Проанализируйте процесс усвоения этих результатов *коллективным субъектом* процесса преподавания — группой в целом. Для этого ответьте на следующие вопросы. 1) Доказывал ли каждый студент каждую из теорем? 2) Каким образом студент узнал о тех теоремах, над которыми он не работал? 3) Имел ли студент возможность оценить в качестве эксперта истинность результатов других студентов? 4) Станет ли группа в целом считать теоремой рассматриваемое утверждение, если в процессе обсуждения этого утверждения будет обнаружена ошибка в доказательстве?

Результат решения данной задачи иллюстрирует тот факт, что математике присущ так называемый ***личностно-социальный дуализм****. Это означает, что имеют место несколько дополняющих друг друга фактов: (а) каждый математический результат изобретается* ***лично*** *тем или иным конкретным математиком или группой математиков; (б) математика может существовать только благодаря наличию особого социального института —* ***научного сообщества****; (в) изобретенный результат становится фактом науки только после его принятия научным сообществом; (г) процесс принятия нового результата включает в себя* ***обмен информацией*** *о содержании нового результата и различные виды экспертных оценок.*

2.6. Математические результаты, содержащиеся в задачах 2.1—2.3, можно получить другим способом, который мы назовем *Сценарием 3*: «**Задача**. Докажите, что если функция является дифференцируемой и нечетной, то ее производная четна. **Решение**. Продифференцировав равенство $f(-x) = -f(x)$, получим, что $f'(-x) = f'(x)$, что и доказывает четность производной». Который из двух способов работы с задачей, Сценарий 1 или Сценарий 3, больше похож на работу математика-профессионала, изобретающего новые теоремы? Для ответа на этот основной вопрос ответьте на ряд вспомогательных вопросов, применив их к каждому из сценариев. 1) Делает ли студент какие-либо наблюдения над математическими объектами? 2) Формулирует ли студент какие-либо гипотезы? 3) Кто формулирует доказываемое утверждение, студент или автор задачника?

Результат решения данной задачи иллюстрирует тот факт, что математике присущ так называемый ***деятельностно-продуктивный дуализм****. Это означает, что понятие математики включает в себя как деятельность по получению нового знания, так и продукт этой деятельности — сумму полученных к данному моменту математических знаний.*

Задачи 2.7—2.14 посвящены различным аспектам метода математической индукции. Главными из них являются задачи 2.7—2.10. Проводя педагогический анализ их решений, следует обращать внимание на роль и место индуктивных и дедуктивных рассуждений, а также на «количественное» соотношение между ними.