И. В. Садовничая, Т. Н. Фоменко

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ АКАДЕМИЧЕСКОГО БАКАЛАВРИАТА

Под общей редакцией академика РАН **В. А. Ильина**

2-е издание, переработанное и дополненное

Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по естественнонаучным направлениям

Москва ▪ Юрайт ▪ 2019

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73
С14

***Авторы*:**

Садовничая Инна Викторовна — доцент, доктор физико-математических наук, доцент кафедры общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова;

Фоменко Татьяна Николаевна — доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

***Ответственный редактор*:**

Ильин Владимир Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН, академик МАН ВШ, лауреат Государственной премии СССР и Премии президента Российской Федерации в области образования.

***Рецензенты*:**

Тихомиров В. В. — доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей математики, заместитель декана по учебно-методической работе факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова;

Фомичев В. В. — доктор физико-математических наук, профессор, заместитель заведующего кафедрой нелинейных динамических систем и процессов управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Садовничая, И. В.

С14 Математический анализ. Предел и непрерывность функции одной переменной : учеб. пособие для академического бакалавриата / И. В. Садовничая, Т. Н. Фоменко ; под общ. ред. В. А. Ильина. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 115 с. — (Серия : Бакалавр. Академический курс).

ISBN 978-5-534-08473-3

Данное учебное пособие посвящено теоретическим и практическим аспектам темы «Предел и непрерывность функции одной переменной», изучаемой в рамках программы курса математического анализа. Оно основано на многолетнем опыте чтения авторами лекций и ведения практических занятий на факультете вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета.

Пособие содержит разделы, посвященные понятию функции одной переменной, понятию предела функции, непрерывности в точке и на множестве и их применению в различных задачах анализа. Для лучшего усвоения материала приводится ряд иллюстраций, а также набор задач по рассматриваемой теме, часть из которых излагается с полным решением, а часть дается для самостоятельной работы студентов.

Соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по естественнонаучным направлениям, преподавателей и всех, кто желает самостоятельно изучить данную тему или более подробно с ней ознакомиться.

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73

ISBN 978-5-534-08473-3

Оглавление

Предисловие.

Уважаемые читатели!

Данный учебник содержит материал по теме: «Предел и непрерывность функции одной переменной» в объеме программы курса математического анализа для студентов первого курса математических специальностей ВУЗов. Предполагается, что читатель знаком с теорией вещественных чисел и последовательностей.

В книге три главы. В каждой главе своя двойная нумерация определений, всех утверждений, а также задач, с указанием номера параграфа.

В первой и второй главах излагается теоретический материал по теме «Предел и непрерывность функции одной переменной». Для лучшего восприятия материала мы поместили несколько рисунков, примеров и замечаний, разъясняющих те или иные понятия и утверждения.

В третьей главе помещены подборки задач по всем разделам первых двух глав. Наряду с вычислительными задачами, приводится ряд задач на доказательство. Мы полагаем, что их решение является одной из наиболее эффективных форм усвоения теоретического материала и будет очень полезным для студентов при подготовке к экзаменам. При этом в каждом параграфе часть задач приводится с подробными решениями, а остальные даются для самостоятельной работы читателей. Все задачи снабжены ответами.

Список литературы в конце книги содержит учебники и задачники, которые использовались при составлении данного учебника, а также некоторые источники для более подробного знакомства с изложенными в книге темами.

Книга написана на основе многолетнего чтения авторами лекций и ведения семинарских занятий по математическому анализу на факультете ВМК МГУ. Предназначена, в первую очередь, студентам первых курсов ВУЗов, обучающихся по математическим и естественнонаучным специальностям, но может быть полезна и школьникам старших классов, школьным учителям, преподавателям ВУЗов и всем, интересующимся данной темой.

В результате изучения раздела «предел и непрерывность функции одной переменной» дисциплины «математический анализ» читатели будут знать основные термины и факты математического анализа, связанные с понятиями предела и непрерывности функции одной переменной, а также идеи и основные принципы доказательства соответствующих теорем.

Они будут уметь самостоятельно проводить исследования с целью выяснения истинности различных математических утверждений, решать вычислительные задачи, обосновывая свои выкладки строгими логическими заключениями. При этом они будут владеть основными приемами доказательств по данной тематике, терминологией и логикой определений и формулировок теорем.

Желаем удачи и увлекательного путешествия в мир математического анализа!

И.В.Садовничая, Т.Н.Фоменко

Глава 1. Предел функции

§1. Понятие предела функции.

Определение 1.1. *Если каждому элементу x из множества $X \subseteq \mathbb{R}$ ставится в соответствие по известному закону f некоторое (единственное) число $y \in \mathbb{R}$, то говорят, что на множестве X задана* ***функция*** $f : X \to \mathbb{R}$. *При этом обозначают: $y = f(x)$. Часто, говоря о функции f, пишут: «задана функция $y = f(x)$».*

Число x называется ***аргументом*** *или* ***(независимой) переменной;*** *множество $X = X_f$ —* ***областью определения*** *функции f; число $y = f(x)$ —* ***(частным) значением*** *функции f в точке x; множество $Y = f(X_f) = \{y \in \mathbb{R} \,|\, \exists x \in X_f, y = f(x)\} \subseteq \mathbb{R}$ —* ***областью изменения*** *или* ***множеством значений*** *функции f. Часто используются обозначения: $X = D_f$, $Y = E_f$.*

Графиком функции *называется множество точек плоскости, абсциссы которых равны допустимым значениям аргумента x, а ординаты — соответствующим значениям функции y, то есть график функции f — это множество $\Gamma_f = \{(x, y) \in X_f \times \mathbb{R} | x \in X_f, y = f(x)\}$.*

Отождествляя функцию f с ее графиком Γ_f, можно понимать ее как **отображение,** т.е. подмножество Γ_f произведения $X_f \times \mathbb{R}$ такое, что для любого $x \in X_f$ существует единственная пара $(x, y) \in \Gamma_f \subseteq X_f \times \mathbb{R}$, где $y = f(x)$ (определение отображения см., например, в [4]).

Определение 1.2. *Пусть $a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Множество $U_\delta(a) \setminus \{a\} = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ будем называть* ***проколотой*** *δ*–***окрестностью*** *точки a и обозначать $\mathring{U}_\delta(a)$.*

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X_f, $a \in \mathbb{R}$ — предельная точка множества X_f.

Определение 1.3 (предел функции по Гейне). *Число $b \in \mathbb{R}$ называется* ***пределом*** *или* ***предельным значением*** *функции $y = f(x)$ в точке a, если для любой последовательности $\{x_n\}$ аргументов функции, такой, что $\{x_n\}$ сходится к a при $n \to +\infty$, причем $x_n \neq a$ для любого $n \in \mathbb{N}$, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к b.*

Определение 1.4 (предел функции по Коши). *Число $b \in \mathbb{R}$ называется* ***пределом*** *или* ***предельным значением*** *функции $y = f(x)$ в точке a, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого x из множества $\overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X_f$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.*

Обозначения: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ или $f(x) \underset{x \to a}{\to} b$.

Теорема 1.1. *Определения 1.3 и 1.4 эквивалентны.*

Доказательство. 1) Предположим, что выполнено определение предела по Коши. Выберем произвольную последовательность $\{x_n\}$ аргументов, такую, что $\{x_n\}$ сходится к a, но $x_n \neq a$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\varepsilon > 0$ — некоторое вещественное число. Тогда (в силу определения по Коши) существует положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что для любой точки $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X_f$ выполнено неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Так как $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$ и $x_n \neq a$, то найдется натуральный номер $N = N(\delta)$ такой, что $0 < |x_n - a| < \delta$, то есть $x_n \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X_f$ при всех $n \geqslant N$. Значит, для любого $n \geqslant N$ выполняется неравенство $|f(x_n) - b| < \varepsilon$, и следовательно, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к b. Мы показали, что, если выполнено определение предела функции по Коши, то выполнено и определение по Гейне.

2) Предположим теперь, что определение по Коши не

выполнено. Это означает, что существует такое вещественное число $\varepsilon > 0$, что для любого положительного числа $\delta \in \mathbb{R}$ найдется точка $x = x_\delta \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X_f$, для которой будет иметь место неравенство $|f(x) - b| \geqslant \varepsilon$. Обозначим $\delta_n = 1/n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Получим, что для любого натурального n существует точка $x_n \in X_f$ такая, что $0 < |x_n - a| < 1/n$, но $|f(x_n) - b| \geqslant \varepsilon$. Это означает, что последовательность $\{x_n\}$ аргументов сходится к a, но соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции не сходится к b. Значит, число b не является пределом функции и в смысле определения по Гейне.

Итак, показано, что если определение по Коши не выполнено, то и определение по Гейне тоже не выполнено. Это означает, что если определение по Гейне выполнено, то и определение по Коши тоже выполнено.$\square$

Пример 1.1. *Рассмотрим функцию $f(x) = x$. Пусть $a \in \mathbb{R}$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a$, так как для любой последовательности $\{x_n\}$ аргументов, такой, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, будет выполнено равенство: $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.*

Бесконечные пределы, односторонние пределы, пределы на бесконечности

Выше определен предел функции как число $b \in \mathbb{R}$. Определим теперь понятие бесконечного предела.

Определение 1.5 (по Гейне). ***Предел*** *функции $y = f(x)$ в точке $a \in \mathbb{R}$* ***равен*** *$\infty(+\infty$ или $-\infty)$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ аргументов функции, такой, что $\{x_n\}$ сходится к a при $n \to +\infty$, и при этом $x_n \neq a$ для любого $n \in \mathbb{N}$, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции стремится к ∞ ($+\infty$ или $-\infty$).* Обозначения: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty(+\infty$ или $-\infty)$ или $f(x) \underset{x\to a}{\to} \infty(+\infty$ или $-\infty)$.

Определение 1.6 (по Коши). ***Предел*** *функции $y = f(x)$ в точке a* ***равен*** *∞ ($+\infty$ или $-\infty$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X_f$ выполнено: $|f(x)| > \varepsilon$ ($f(x) > \varepsilon$ или $f(x) < -\varepsilon$).* Обозначения: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ ($+\infty$ или $-\infty$) или $f(x) \underset{x \to a}{\to} \infty$ ($+\infty$ или $-\infty$).

Определения 1.5 и 1.6 эквивалентны. Доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 1.1.

Введем понятие правого (левого) предела функции. Потребуем, чтобы для любого $\delta > 0$ множество $(a, a+\delta) \cap X_f$ ($(a - \delta, a) \cap X_f$) содержало хотя бы один элемент.

Определение 1.7 (по Гейне). *Число $b \in \mathbb{R}$ или $b = \infty, +\infty, -\infty$, называется* ***правым (левым) пределом*** *функции $y = f(x)$ в точке $a \in \mathbb{R}$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ аргументов функции, такой, что $\{x_n\}$ сходится к a и $x_n > a$ ($x_n < a$) для любого $n \in \mathbb{N}$, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к b или, соответственно, к $\infty, +\infty, -\infty$.*

Определение 1.8 (по Коши). *Число $b \in \mathbb{R}$ (или $b = \infty$, $+\infty$, $-\infty$) называется* ***правым (левым) пределом*** *функции $y = f(x)$ в точке a, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого x из множества $(a, a + \delta) \cap X_f$ ($(a - \delta, a) \cap X_f$) выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ (или $|f(x)| > \varepsilon$, $f(x) > \varepsilon$, $\quad f(x) < -\varepsilon$).*

Обозначения: $f(a \pm 0) = \lim\limits_{x \to a \pm 0} f(x) = b$ или $f(x) \underset{x \to a \pm 0}{\to} b$.

Определения 1.7 и 1.8 эквивалентны.

Из определений предела по Коши сразу следует

Утверждение 1.1. *Пусть функция $f(x)$ определена в проколотой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = b. \quad \square$$

Теперь введем понятие предела функции при $x \to a$ в случае, когда a является не конечным числом, а символической бесконечно удаленной точкой (то есть одной из точек ∞, $+\infty$, $-\infty$). Напомним, что $\delta-$окрестности таких точек определяются как множества $U_\delta(\infty) = (-\infty, -\delta) \cup (\delta, +\infty)$, $U_\delta(+\infty) = (\delta, +\infty)$, $U_\delta(-\infty) = (-\infty, -\delta)$, $\delta > 0$. Очевидно, что в этом случае проколотые окрестности совпадают с обычными, то есть: $\overset{\circ}{U}_\delta(\infty) = U_\delta(\infty)$, $\overset{\circ}{U}_\delta(+\infty) = U_\delta(+\infty)$, $\overset{\circ}{U}_\delta(-\infty) = U_\delta(-\infty)$. Дадим определение предела в случае бесконечной точки a.

Определение 1.9 (по Гейне). *Число* $b \in \mathbb{R}$ *или* $b = \infty(+\infty, -\infty)$ *называется* ***пределом*** *функции* $y = f(x)$ ***при*** $x \to \infty$***,***$(x \to +\infty,\ x \to -\infty)$, *если для любой последовательности* $\{x_n\}$ *аргументов функции, такой, что* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \infty$ $(\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty,\ \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty)$, *соответствующая последовательность* $\{f(x_n)\}$ *значений функции сходится к* b *или, соответственно, к* $\infty\,(+\infty,\ -\infty)$.

Определение 1.10 (по Коши). *Число* $b \in \mathbb{R}$ *или* $b = \infty,\ +\infty,\ -\infty$ *называется* ***пределом*** *функции* $y = f(x)$ ***при*** $x \to \infty$***,*** $(x \to +\infty, x \to -\infty)$, *если для любого числа* $\varepsilon > 0$ *найдется число* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что для любого* $x \in X_f$, *для которого* $|x| > \delta$ $(x > \delta, x < -\delta)$, *выполняется неравенство* $|f(x) - b| < \varepsilon$ *или* $|f(x)| > \varepsilon$, $f(x) > \varepsilon, \quad f(x) < -\varepsilon$.

Обозначения: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ $(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b)$ или $f(x) \underset{x\to\infty}{\to} b$ $(f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} b$, $f(x) \underset{x\to-\infty}{\to} b)$.

Несложно показать, что определения 1.9 и 1.10 эквивалентны.

Объединяя все вышесказанное, можно дать общее определение предела функции в точке (конечной или бесконечной) в терминах окрестностей:

Определение 1.11. *Пусть каждая из точек* a, b *при-*

*надлежит вещественной прямой или является бесконечно удаленной точкой. Говорят, что **предел** функции $f(x)$ при x, стремящемся к a, **равен** b, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всякого x из множества $\overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X_f$ верно, что $f(x) \in U_\varepsilon(b)$ (здесь a — предельная точка множества X_f).*

Пусть теперь $b \in \mathbb{R}$ и a — предельная точка множества X_f (конечная или бесконечная). Иногда бывает полезно использовать следующие определения:

Определение 1.12 (по Гейне). *Если для любой последовательности $\{x_n\}$ аргументов функции, такой, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $x_n \neq a$ для любого $n \in \mathbb{N}$, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к b и при этом $f(x_n) > b$ $(f(x_n) < b)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то пишут: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b + 0$ $(\lim\limits_{x\to a} f(x) = b - 0)$.*

Определение 1.13 (по Коши). *Говорят, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b + 0$ $(\lim\limits_{x\to a} f(x) = b - 0)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X_f$ выполняются неравенства $0 < f(x) - b < \varepsilon$ $(0 < b - f(x) < \varepsilon)$.*

Определения 1.12 и 1.13 эквивалентны. Доказательство этого факта аналогично общему случаю.

Критерий Коши существования предела функции

Определение 1.14. *Функция $y = f(x)$ удовлетворяет в точке a **условию Коши**, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых точек $x', x'' \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X_f$ имеет место неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.*

Теорема 1.2 (критерий Коши существования предела функции в точке). *Функция $y = f(x)$ имеет в* *точке a конечный предел тогда и только тогда, когда она удовлетворяет в этой точке условию Коши.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Тогда найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любой точки x из множества $\overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X_f$ будет выполнено неравенство: $|f(x) - b| < \varepsilon/2$. Пусть $x', x'' \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X_f$. Тогда $|f(x') - f(x'')| = |f(x') - b + b - f(x'')| \leqslant \leqslant |f(x') - b| + |f(x'') - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, то есть функция $f(x)$ удовлетворяет условию Коши в точке a.

Достаточность. Проведем доказательство для случая $a \in \mathbb{R}$ (случай бесконечно удаленной точки a рассматривается аналогично). Предположим, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию Коши в точке a. Выберем последовательность $\{x_n\}$ аргументов, такую, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $x_n \neq a$. Тогда найдется такой номер $N = N(\delta)$, что для любого натурального $n \geqslant N$ и любого натурального p будут выполняться неравенства: $0 < |x_n - a| < \delta$, $0 < |x_{n+p} - a| < \delta$. В силу условия Коши имеем: $|f(x_{n+p}) - f(x_n)| < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$ и $p \in \mathbb{N}$. Но это означает, что числовая последовательность $\{f(x_n)\}$ является фундаментальной. Следовательно, она сходится.

Итак, мы показали, что для любой последовательности $\{x_n\}$ аргументов, такой, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $x_n \neq a$, соответствующая последовательность значений функции имеет предел. Докажем, что этот предел не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$. Пусть $\{x'_n\}$, $\{x''_n\}$ — две различные последовательности аргументов $f(x)$, удовлетворяющие условиям: $\lim\limits_{n\to+\infty} x'_n = a$, $x'_n \neq a$; $\lim\limits_{n\to+\infty} x''_n = a$, $x''_n \neq a$. Тогда существует $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x'_n) = b'$ и существует $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x''_n) = b''$. Рассмотрим последовательность $\{x_n\} = \{x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \ldots, x'_n, x''_n, \ldots\}$. Очевидно, что она стремится к a при $n \to +\infty$, и при этом $x_n \neq a$.

Значит, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится. Обозначим $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = b$. Так как последовательности $\{f(x'_n)\}$, $\{f(x''_n)\}$ являются подпоследовательностями сходящейся последовательности $\{f(x_n)\}$, то они должны сходиться к тому же самому пределу. Значит, $b' = b'' = b$. Мы показали, что предел последовательности значений функции не зависит от выбора соответствующей последовательности ее аргументов. Это означает, что функция $f(x)$ имеет конечный предел, равный b, в точке a. $\square$

Арифметические операции над функциями, имеющими пределы

Теорема 1.3. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на множестве $X \subseteq \mathbb{R}$, a — предельная точка множества X (конечная или бесконечная), $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$ (b, c — конечные числа).*

Тогда $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = b \pm c$, $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$ (в случае, если $c \neq 0$).

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность точек множества X, такая, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $x_n \neq a$. Тогда $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = b$, $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = c$. Значит (по теореме об арифметических операциях над сходящимися последовательностями), $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(x_n) \pm g(x_n)) = b \pm c$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(x_n) \cdot g(x_n)) = b \cdot c$. Если $c \neq 0$, то, начиная с некоторого номера, $g(x_n) \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = \dfrac{b}{c}$. Но это означает, в силу определения предела функции по Гейне, что $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = b \pm c$, $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$ (при $c \neq 0$). $\square$

О пределе сложной функции

Определение 1.15. *Пусть функция* $x = \varphi(t)$ *задана на множестве* T*;* X *— множество ее значений. Если на множестве* X *задана функция* $y = f(x)$*, то говорят, что на* T *определена* ***сложная функция*** $y = f(\varphi(t)) = (f \circ \varphi)(t)$ *(функцию* $f \circ \varphi$ *называют также* ***композицией*** *функций* f *и* φ*).*

Замечание 1.1. Можно было бы ожидать, что справедливо следующее утверждение: если $\lim\limits_{t\to t_0} \varphi(t) = x_0$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, то $\lim\limits_{t\to t_0} f(\varphi(t)) = l$. Такое утверждение справедливо, например, для непрерывных функций (см. теорему 1.2 главы 2). Однако в общем случае подобная теорема неверна.

Пример 1.2. *Пусть* $f(x) = 0$ *при* $x \neq 0$ *и* $f(0) = 1$*;* $\varphi(t) \equiv 0$*. Тогда* $\lim\limits_{t\to 0} \varphi(t) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{t\to 0} f(\varphi(t)) = 1$.

Тем не менее, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.4. *Пусть* $\lim\limits_{t\to t_0} \varphi(t) = x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. *Тогда* $\lim\limits_{t\to t_0} f(\varphi(t)) = f(x_0)$.

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По определению предела существует $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_1}(x_0)$ выполнено: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Далее, существует $\delta = \delta(\delta_1) > 0$ такое, что $|\varphi(t) - x_0| < \delta_1$ при всех $t \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(t_0)$. Но тогда получаем, что $\forall t \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(t_0)$ справедливо неравенство $|f(\varphi(t)) - f(x_0)| < \varepsilon$. Это и означает, что $\lim\limits_{t\to t_0} f(\varphi(t)) = f(x_0)$. $\square$

Предельный переход в неравенствах для функций

Теорема 1.5. *Пусть функции* $f(x)$, $g(x)$ *определены на множестве* X*,* a *— предельная точка* X*,* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$*,* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$*. Если существует такое число* $\delta > 0$*, что* *при всех x из множества $\overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant g(x)$, то $b \geqslant c$.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность точек множества X, такая, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, причем $x_n \neq a$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда найдется такое натуральное число $N = N(\delta)$, что для всех $n \geqslant N$ выполнено: $x_n \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$. Значит, $f(x_n) \geqslant g(x_n)$ $\forall n \geqslant N$, следовательно, $b = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \geqslant \lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = c$ (по теореме о предельном переходе в неравенствах для последовательностей). $\square$

Замечание 1.2. Если $f(x) > g(x)$, то в пределе возможно равенство: $b = c$. Например, пусть $f(x) = 1/x$, $g(x) = 1/(x+1)$. Тогда $f(x) > g(x)$ при $x > 0$, но $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Теорема 1.6. *Пусть функции $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ определены на множестве X, a — предельная точка X, причем $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b$. Если существует такое число $\delta > 0$, что при всех x из множества $\overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ выполняется двойное неравенство $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$, то существует $\lim\limits_{x\to a} h(x) = b$.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность точек множества X, такая, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $x_n \neq a$. Тогда $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = b$ и найдется такое натуральное $N = N(\delta)$, что для всех $n \geqslant N$ выполнено: $f(x_n) \leqslant h(x_n) \leqslant g(x_n)$. Значит, по теореме о предельном переходе в двойном неравенстве для последовательностей, последовательность $\{h(x_n)\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to+\infty} h(x_n) = b$. Согласно определению предела функции по Гейне, это означает, что $\lim\limits_{x\to a} h(x) = b$. $\square$