А. П. Потапов

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

УЧЕБНИК И ПРАКТИКУМ
ДЛЯ ПРИКЛАДНОГО БАКАЛАВРИАТА

Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебника и практикума для студентов высших учебных заведений, обучающихся по естественнонаучным направлениям

Москва ▪ Юрайт ▪ 2019

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
П64

***Автор*:**

Потапов Александр Пантелеймонович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Института прикладной математики и механики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

***Рецензенты*:**

Антонов В. И. — доктор технических наук, заведующий кафедрой высшей математики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого;

Тертычный В. Ю. — доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Санкт-Петербургского национального исследовательского университета информационных технологий, механики и оптики.

Потапов, А. П.

П64 Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / А. П. Потапов. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 310 с. — Серия : Бакалавр. Прикладной курс.

ISBN 978-5-534-01232-3

Учебник содержит необходимый теоретический материал, задачи и упражнения по разделам курса высшей математики: линейная алгебра, векторная алгебра, аналитическая геометрия на плоскости, аналитическая геометрия в пространстве.

Изложение теоретического материала сопровождается большим количеством разобранных примеров. Задачи и упражнения охватывают все темы, затронутые в теоретической части. Приведены образцы контрольных работ по указанным разделам с ответами и решениями.

Учебник соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту высшего образования и действующим программам, рекомендован студентам и преподавателям как при работе в аудитории, так и при подготовке к занятиям, контрольным работам и экзаменам по высшей математике.

Для бакалавров технических и экономических направлений университетов.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-5-534-01232-3

Оглавление

Раздел II
ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Раздел III
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Раздел IV
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

ПРАКТИКУМ

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

Предисловие

Настоящий учебник предназначен для лиц, начинающих изучение курса высшей математики. Он включает в себя следующие разделы: линейная алгебра, векторная алгебра, аналитическая геометрия на плоскости и аналитическая геометрия в пространстве, изучаемые в технических вузах, как правило, в первом семестре.

Овладение этим материалом предполагает наличие у обучающихся хороших знаний основных понятий школьного курса алгебры и геометрии. Успешное освоение представленного материала необходимо для изучения последующих разделов высшей математики, основным из которых является математический анализ.

Данный курс адресован студентам, обучающимся по программам бакалавриата и специалитета инженерно-технических и экономических направлений вузов. Его можно использовать также при обучении в системе дополнительного профессионального образования указанных направлений.

Учебник может быть рекомендован студентам и преподавателям для подготовки к текущим занятиям, контрольным работам и экзаменам, а также для самостоятельного изучения соответствующего материала.

Курс включает в себя три основные части: теория, практикум и ответы.

В теоретической части книги четыре раздела. В них в доступной форме изложен необходимый материал со строгими математическими формулировками и доказательствами в соответствии с действующими программами Федерального государственного образовательного стандарта. При подаче материала опускаются наиболее сложные и громоздкие выкладки. Для знакомства с ними читатель может обратиться к литературе, упомянутой в ссылках. Изложение теории для лучшего восприятия и понимания сопровождается многочисленными примерами, рисунками и чертежами.

Для проверки усвоения материала в конце каждой главы предложены контрольные вопросы и задачи по пройденной теме. Ответы к ним можно найти в конце книги.

Практикум содержит задачи и упражнения по всем темам, затронутым в теоретической части, разбитые на четыре модуля. Эти модули предваряются списком основных формул, необходимых для решения задач. В каждом разделе выделены дополнительные задачи повышенного уровня сложности. Ко всем задачам в конце книги даны ответы.

При подборе задач для практикума были использованы различные пособия и методические материалы, которые указаны в списке литературы. Некоторые задачи составлены автором специально для данного учебника.

В практикуме представлены также:

• образцы контрольных работ по каждому разделу (с ответами и решениями, приведенными в соответствующем разделе в конце книги);

• список расчетных заданий по кривым 2-го порядка на плоскости и поверхностям в пространстве.

Данный курс отражает многолетний опыт работы автора на технических факультетах Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (СПбПУ).

Автор признателен сотрудникам кафедры высшей математики СПбПУ — регулярное обсуждение с коллегами актуальной темы преподавания математики в вузе привело к появлению данного учебника в его нынешнем виде.

В первую очередь хочется отметить заведующего кафедрой В. И. Антонова, а также профессоров Ю. Д. Максимова и Ю. А. Хватова, доцентов Ю. А. Андрианова, П. Н. Звягина и Н. В. Кондратьеву, старших преподавателей Л. Ф. Амосову и Н. С. Панфилову.

Главы книги имеют сквозную нумерацию по разделам. Теоремы, таблицы, рисунки и примеры имеют нумерацию из двух цифр, первая из которых обозначает номер главы.

В книге приняты следующие обозначения.

Если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — некоторые математические утверждения (теоремы, свойства, формулы и т.д.), то запись «$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$» означает: «из $\mathcal{A}$ следует $\mathcal{B}$».

Запись «$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$» означает эквивалентность (равносильность) утверждений $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, т.е. «из $\mathcal{A}$ следует $\mathcal{B}$» и «из $\mathcal{B}$ следует $\mathcal{A}$».

В результате изучения данного курса студент должен:

знать

• основные понятия линейной алгебры, векторной алгебры и аналитической геометрии;

• определители квадратных матриц и их свойства;

• линейные действия с матрицами и умножение матриц;

• понятия обратной матрицы и ранга матрицы;

• системы линейных уравнений и основные методы их решения: метод Крамера, метод обратной матрицы, метод Гаусса;

• линейные действия с векторами, линейную зависимость и независимость векторов;

• линейное пространство, его базис и размерность;

• скалярное, векторное и смешанное произведения векторов и их свойства;

• системы координат на плоскости и в пространстве, связь между координатами в различных системах координат;

• геометрические приложения векторного исчисления;

• преобразование прямоугольных декартовых координат на плоскости;

• задание линий на плоскости с помощью метода координат;

• основные виды уравнений прямой линии на плоскости;

• кривые 2-го порядка, их свойства и параметры;

• классификацию кривых 2-го порядка по их уравнениям;

• задание линий и поверхностей в пространстве с помощью метода координат;

• основные виды уравнений прямой и плоскости в пространстве;

• цилиндрические, конические поверхности и поверхности вращения;

• классификацию поверхностей 2-го порядка по их каноническим уравнениям;

уметь

• вычислять определители методом разложения по строкам и столбцам с применением свойств определителей;

• производить действия с матрицами;

• вычислять обратную матрицу с помощью присоединенной матрицы;

• находить ранг матрицы;

• решать системы линейных уравнений методом Крамера, методом Гаусса или матричным методом;

• производить линейные действия с векторами, находить разложение вектора по базису;

• вычислять скалярное, векторное и смешанное произведения векторов, заданных координатами в прямоугольной декартовой системе координат;

• применять векторное исчисление при решении геометрических задач;

• составлять уравнения линий на плоскости по заданному геометрическому описанию;

• решать основные геометрические задачи, связанные с прямой линией на плоскости;

• исследовать кривые 2-го порядка по их каноническим уравнениям;

• приводить общее уравнение кривых 2-го порядка к каноническому виду;

• составлять уравнения прямых и плоскостей в пространстве по геометрическому описанию;

• определять взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве друг относительно друга по их заданным уравнениям;

• составлять уравнения цилиндрической, конической поверхности и поверхности вращения;

• исследовать поверхности 2-го порядка методом сечений;

владеть

• методами матричного исчисления и вычисления числовых характеристик (определителя или ранга) произвольных матриц;

• методами исследования систем линейных уравнений;

• навыками применения векторного исчисления при решении геометрических задач;

• координатным методом при решении различных геометрических и физических задач;

• навыками применения метода координат при решении геометрических задач, связанных с прямыми и плоскостями;

• методами исследования кривых и поверхностей 2-го порядка.

Раздел I

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Введение

Перед изложением основных тем линейной алгебры рассмотрим одну конкретную задачу и необходимый математический инструмент для ее решения, предварительно введя основные понятия и обозначения.

При исследовании разнообразных практических задач возникает необходимость решения тех или иных алгебраических уравнений или систем уравнений. Простейшими из них являются системы линейных уравнений.

Определение 1. ***Системой m линейных уравнений с n неизвестными*** называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1}$$

где a_{ij} — коэффициенты системы (заданные числа); b_i — свободные члены (заданные числа); x_j — неизвестные, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$.

Коэффициенты системы a_{ij} обозначаются двумя индексами, причем первый индекс означает номер уравнения системы, а второй индекс — номер неизвестной. Свободные члены системы b_i обозначаются одним индексом, который означает номер уравнения системы. Неизвестные x_j обозначаются также одним индексом; если число неизвестных равно двум или трем, то чаще всего их обозначают буквами x, y, z.

Например, система двух линейных уравнений с двумя неизвестными ($m = n = 2$) имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}\,x + a_{12}\,y = b_1, \\ a_{21}\,x + a_{22}\,y = b_2, \end{cases} \tag{2}$$

где a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} — коэффициенты системы; b_1, b_2 — свободные члены; x, y — неизвестные.

Другие примеры систем линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

— система трех линейных уравнений с тремя неизвестными;

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y = b_3 \end{cases}$$

— система трех линейных уравнений с двумя неизвестными;

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \end{cases}$$

— система двух линейных уравнений с тремя неизвестными и т.д.

Системы линейных уравнений можно задать двумя таблицами чисел:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

или одной таблицей чисел:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Такие таблицы чисел носят название «матрицы».

Определение 2. ***Матрицей*** называется прямоугольная таблица чисел, содержащая некоторое количество строк и столбцов. Сами числа, входящие в таблицу, называются *элементами* матрицы.

Если матрица содержит только одну строку и один столбец, то такую матрицу (a_{11}) называют матрицей-числом.

Для системы линейных уравнений (1) имеем следующие матрицы:
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ — основная матрица; $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ — матрица свободных членов; $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ — расширенная матрица; $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — матрица неизвестных.

Для системы (2) — системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными — имеем:
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ — основная матрица; $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ — матрица свободных членов; $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{pmatrix}$ — расширенная матрица; $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ — матрица неизвестных.

Пример 1. (А): для системы $\begin{cases} 2x - 3y = 8, \\ 5x + y = 3 \end{cases}$ имеем: $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ — основная матрица; $\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ — матрица свободных членов; $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ — расширенная матрица системы.

(Б): для системы $\begin{cases} 2x - 3y = -1, \\ -6x + 9y = 3 \end{cases}$ имеем: $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$ — основная матрица; $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ — матрица свободных членов; $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -6 & 9 & 3 \end{pmatrix}$ — расширенная матрица системы.

(В): для системы $\begin{cases} 2x - 3y = 8, \\ -4x + 6y = 3 \end{cases}$ имеем: $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ — основная матрица; $\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ — матрица свободных членов; $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 \\ -4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ — расширенная матрица системы.

Если количество строк матрицы равно количеству столбцов, то матрица называется квадратной:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

— квадратная матрица n-го порядка. Элементы $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ образуют главную диагональ, а элементы $a_{1n}, a_{2n-1}, ... a_{n1}$ — побочную диагональ матрицы.

Определение 3. ***Решением системы*** (1) называется упорядоченный набор чисел $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, который при подстановке в систему линейных уравнений дает *m верных* равенств:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + \dots + a_{1n}x_n^0 = b_1, \\ a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + \dots + a_{2n}x_n^0 = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1^0 + a_{m2}x_2^0 + \dots + a_{mn}x_n^0 = b_m. \end{cases}$$

Например, решением системы (А) из примера 1 является пара (1; –2), так как при подстановке этой пары в систему (А) получаем два верных равенства: $\begin{cases} 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) = 8, \\ 5 \cdot 1 + (-2) = 3. \end{cases}$ Оказывается (как будет показано далее), что эта пара — единственное решение системы, т.е. других решений у системы (А) нет.

Определение 4. Система (1) называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение; иначе система называется ***несовместной***.

Например, система (А) из примера 1 — совместная система; (Б) — также совместная система, так как она имеет решения (4; 3), (10; 7), (16; 11) и т.д. Система (В) — несовместная, т.е. у нее нет решений; действительно, если $2x - 3y = 8$, то $-4x + 6y = -2(2x - 3y) = -16 \neq 3$.

Определение 5. Совместная система называется ***определенной***, если она имеет *единственно*е решение; иначе она называется ***неопределенной***.

Например, (А) из примера 1 — определенная система; (Б) — неопределенная система.

Как будет показано в дальнейшем, любая совместная система линейных уравнений имеет либо единственное решение, либо бесчисленное множество решений. Это означает, что если число решений системы конечно, то решение единственно.

Исследовать систему линейных уравнений означает выяснить, является ли система совместной или несовместной, а в случае совместности системы выяснить, является ли она определенной или неопределенной.

Решить систему линейных уравнений означает *найти все решения* этой системы.

Для того чтобы решить систему линейных уравнений, надо преобразовать ее в более простую систему, сохраняя (не меняя) все множество решений исходной системы. Такие системы линейных уравнений (исходная и преобразованная) называются равносильными.

Определение 6. Две системы линейных уравнений называются ***равносильными***, если они имеют *одинаковое* число неизвестных и *множества решений* этих систем *совпадают*.

В частности, если обе системы несовместны (каждая система имеет пустое множество решений) и имеют одинаковое число неизвестных, то они равносильны.

Для определенных систем с одинаковым числом неизвестных равносильность означает, что каждая из систем имеет единственное решение и оно совпадает для обеих систем.

Для неопределенных систем с одинаковым числом неизвестных равносильность означает, что все решения одной системы являются решениями другой системы, и наоборот.

Равносильные системы обозначаются значком «$\Leftrightarrow$».

Пример 2. 1. Системы $\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 7, \\ 3x - 2y + 6z = 4 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$ не равносильны, так как у них разное число неизвестных.

2. Системы $\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x - 3y = 7, \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$ не равносильны, так как пара (2; 1) является решением первой системы, но не является решением второй системы.

3. Системы $\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$ равносильны; это можно доказать, решив каждую из них каким-нибудь методом и получив в результате, что каждая из этих систем имеет единственное решение, одинаковое для обеих систем: (2; 1).

Переход от данной системы к *равносильной* системе возможен с помощью элементарных преобразований.

Определение 7. ***Элементарными преобразованиями*** системы линейных уравнений называются:

- перестановка уравнений местами;
- умножение уравнений на любые числа, отличные от нуля;
- сложение уравнений (прибавление одного уравнения к другому).

Если переход от одной системы к другой происходит путем умножения какого-нибудь уравнения системы на число, равное нулю, то равносильности систем уже может и не быть. В этом случае множество решений новой системы может быть шире множества решений старой системы за счет появления посторонних решений.

Избавиться от посторонних решений можно путем проверки, подставляя найденные решения новой системы в исходную систему.

Все вышеизложенное проиллюстрируем на примере решения следующей задачи.

Исследование системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Рассмотрим систему (2):

$$\begin{cases} a_{11} x + a_{12} y = b_1, \\ a_{21} x + a_{22} y = b_2. \end{cases}$$

Сначала рассмотрим тривиальный случай, когда все элементы одной из строк (или обеих строк) основной матрицы системы (2) равны нулю:

1) $\begin{cases} 0x + 0y = b_1, \\ 0x + 0y = b_2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 0x + 0y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ 0x + 0y = b_2. \end{cases}$

В случае 1) имеем: если $b_1 = b_2 = 0$, то любая пара действительных чисел (x, y) является решением системы; если $b_1 \neq 0$ или $b_2 \neq 0$, то система несовместна.

В случае 2) имеем: если $b_1 \neq 0$, то система несовместна; если $b_1 = 0$, то решение системы сводится к решению одного уравнения: $a_{21}x + a_{22}y = b_2$. Это уравнение имеет бесчисленное множество решений:

$$x = c,\ y = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}c) \text{ при } a_{22} \neq 0 \text{ или } y = c,\ x = \frac{1}{a_{21}}(b_2 - a_{22}c) \text{ при } a_{21} \neq 0,$$

где c — произвольное действительное число.

В случае 3) исследование системы аналогично случаю 2).

Далее рассмотрим общий случай, отличный от рассмотренных выше.

Умножим обе части 1-го уравнения системы (2) на число a_{22}, а 2-го уравнения — на число a_{12}:

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y = b_1a_{22}, \\ a_{21}a_{12}x + a_{22}a_{12}y = b_2a_{12}. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

Далее умножим обе части 1-го уравнения системы на число a_{21}, а 2-го уравнения — на число a_{11}:

$$\begin{cases} a_{11}a_{21}x + a_{12}a_{21}y = b_1a_{21}, \\ a_{11}a_{21}x + a_{11}a_{22}y = b_2a_{11}. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получим

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

Таким образом, из исходной системы, как следствие, получаем новую систему уравнений:

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = b_2a_{11} - b_1a_{21}. \end{cases}$$

Введем следующие обозначения:

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};\ \ \Delta_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12};\ \ \Delta_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

Тогда полученная система перепишется в виде

$$\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_1, \\ \Delta \cdot y = \Delta_2. \end{cases} \tag{3}$$

Если $\Delta \neq 0$, то получим единственное решение системы (3): $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$; $y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$.

Далее необходимо сделать проверку, так как при переходе от системы (2) к системе (3) было умножение уравнений на коэффициенты a_{ij}, а среди них могут быть и нули.

Подставим найденные значения неизвестных в систему (2).

Подставляя в 1-е уравнение, получим

$$a_{11}x + a_{12}y = a_{11}\frac{\Delta_1}{\Delta} + a_{12}\frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}(a_{11}\Delta_1 + a_{12}\Delta_2) =$$

$$= \frac{a_{11}(b_1 a_{22} - b_2 a_{12}) + a_{12}(b_2 a_{11} - b_1 a_{21})}{\Delta} = \frac{b_1(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{\Delta} = \frac{b_1\Delta}{\Delta} = b_1.$$

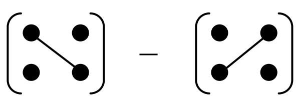
Аналогично подставляя во 2-е уравнение, получим

$$a_{21}x + a_{22}y = a_{21}\frac{\Delta_1}{\Delta} + a_{22}\frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}(a_{21}\Delta_1 + a_{22}\Delta_2) =$$

$$= \frac{a_{21}(b_1 a_{22} - b_2 a_{12}) + a_{22}(b_2 a_{11} - b_1 a_{21})}{\Delta} = \frac{b_2\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right)}{\Delta} = \frac{b_2\Delta}{\Delta} = b_2.$$

Следовательно, найденное решение системы (3) является также и решением исходной системы линейных уравнений: $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$; $y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$.

Величины Δ, Δ_1 и Δ_2 связаны с матрицами 2-го порядка $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$ следующим правилом: из произведения чисел, стоящих на главной диагонали матрицы, вычитается произведение чисел, стоящих на побочной диагонали матрицы:



Величины, вычисляемые по этому правилу, называются определителями 2-го порядка и обозначаются символами: det(...) или $|\ldots|$, где многоточие означает матрицу 2-го порядка.

Определение 8. ***Определителем*** 2-го порядка называется число, равное разности произведения элементов, стоящих на главной диагонали матрицы 2-го порядка и произведения элементов, стоящих на побочной диагонали:

$$\Delta = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

$$\Delta_1 = \det\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - b_2 a_{12};$$

$$\Delta_2 = \det\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2 a_{11} - b_1 a_{21}.$$

При этом число Δ называется основным определителем, а числа Δ_1 и Δ_2 — вспомогательными определителями системы линейных уравнений.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема Крамера[1]**.** *Рассматривается система двух линейных уравнений с двумя неизвестными:*

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases}$$

Если основной определитель системы Δ *отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое задается формулами Крамера:*

$$\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_1, \\ \Delta \cdot y = \Delta_2, \end{cases}$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$; $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

Пример 3. Решим систему $\begin{cases} 2x - 3y = 8, \\ 5x + y = 3. \end{cases}$

Решение. Имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1 - (-3)\cdot 5 = 17;\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 8\cdot 1 - 3\cdot(-3) = 17;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 - 8\cdot 5 = -34 \Rightarrow x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{17}{17} = 1,\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-34}{17} = -2.$$

Ответ: решение системы (1; –2).

Продолжим изучение системы (2) в случае, когда $\Delta = 0$. При этом условии система (3) запишется в виде

$$\begin{cases} 0 \cdot x = \Delta_1, \\ 0 \cdot y = \Delta_2. \end{cases}$$

Если $\Delta_1 \neq 0$ или $\Delta_2 \neq 0$, то данная система, а значит, и исходная система (2) решений не имеют.

Если $\Delta_1 = 0$ и $\Delta_2 = 0$, то система (3) запишется в виде

$$\begin{cases} 0 \cdot x = 0, \\ 0 \cdot y = 0, \end{cases}$$

а ее решением будет любая пара действительных чисел (x, y).

Что можно сказать в этом случае о решении исходной системы?

Из условий $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ получим равенства

$$a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21};\ b_1a_{22} = b_2a_{12};\ b_2a_{11} = b_1a_{21}.$$

Эти равенства можно записать в виде пропорций:

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2} \text{ или } \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{a_{22}}{a_{12}} = \frac{b_2}{b_1}$$

(если знаменатели дробей не равны нулю).

---

[1] Габриэль Крамер (1704—1752) — швейцарский математик, один из создателей линейной алгебры.

Пусть $\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2} = k$; тогда $a_{11} = ka_{21}$, $a_{12} = ka_{22}$, $b_1 = kb_2$, а исходная система (2) запишется в виде

$$\begin{cases} ka_{21}x + ka_{22}y = kb_2, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k(a_{21}x + a_{22}y) = kb_2, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Leftrightarrow a_{21}x + a_{22}y = b_2.$$

Решение системы (2) сводится к решению одного уравнения с двумя неизвестными. Получаем бесчисленное множество решений:

$$x = c, y = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}c) \text{ при } a_{22} \neq 0 \text{ или } y = c, x = \frac{1}{a_{21}}(b_2 - a_{22}c) \text{ при } a_{21} \neq 0,$$

где c — произвольное действительное число.

Следовательно, в случае $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ система (2) имеет бесчисленное множество решений.

Таким образом, система двух линейных уравнений с двумя неизвестными является:

- совместной и определенной, если $\Delta \neq 0$;
- совместной и неопределенной, если $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$;
- несовместной, если $\Delta = 0$, но $\Delta_1 \neq 0$ или $\Delta_2 \neq 0$.

Завершая первое знакомство с *линейной алгеброй*, отметим следующее.

Основная задача этого раздела — изучение систем линейных уравнений. Решение этой задачи требует введения новых понятий: определителей и матриц, с помощью которых исследуются и решаются эти системы. Содержание данного раздела посвящено именно этим темам: определителям, матрицам и системам линейных уравнений.

Разработанные первоначально для изучения систем линейных уравнений матрицы и определители стали играть в дальнейшем самостоятельную роль. Они нашли применение в физике и вычислительной математике, в различных технических и экономических науках. В частности, они используются и в таких разделах математики, как векторная алгебра и аналитическая геометрия.

Глава 1
ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

В результате изучения главы 1 студент должен:

знать

- определители любого порядка и их свойства;
- методы вычисления определителей высших порядков;
- доказательства основных свойств определителей;

уметь

- вычислять определители путем разложения по строке или столбцу;
- применять свойства к определителям любого порядка;

владеть

- методами вычисления определителей любого порядка;
- навыками поиска рационального пути вычисления определителей n-го порядка.

1.1. Определители 2-го и 3-го порядка, их свойства

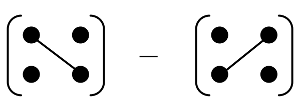
Если $A = (a_{11})$ — матрица-число, то определителем 1-го порядка будем называть само это число: $\det A = |(a_{11})| = a_{11}$.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ — матрица 2-го порядка; a_{ij} — элементы матрицы, $i, j = 1, 2$.

Определение 1.1. ***Определителем матрицы 2-го порядка*** называется число, равное разности произведения элементов, стоящих на главной диагонали, и произведения элементов, стоящих на побочной диагонали этой матрицы:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Это определение удобно представить в виде следующей схемы:



Пример 1.1. Найдем значение определителя $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$.

Решение.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) - 1 \cdot 4 = -6 - 4 = -10.$$

Ответ. -10.

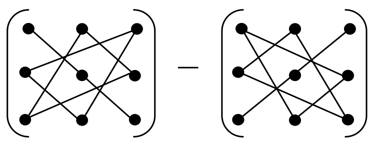
Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ — матрица 3-го порядка, a_{ij} — элементы матрицы, $i, j = 1, 2, 3$.

Определение 1.2. ***Определителем матрицы 3-го порядка*** называется число, которое вычисляется по формуле

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Эта формула называется ***правилом Саррюса*** и легко запоминается в виде следующей схемы:



Алгоритм вычислений по правилу Саррюса выглядит следующим образом:

1) вычисляется сумма трех произведений: элементов, стоящих на главной диагонали, и элементов, находящихся в вершинах равнобедренного треугольника с основанием, параллельным главной диагонали;

2) вычисляется сумма трех произведений: элементов, стоящих на побочной диагонали, и элементов, находящихся в вершинах равнобедренного треугольника с основанием, параллельным побочной диагонали;

3) из первой суммы вычитается вторая сумма.

Пример 1.2. Найдем значение определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Решение.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-5)\cdot 0 + 2\cdot 4\cdot(-2) + 3\cdot 0\cdot 1 - 3\cdot(-5)\cdot(-2) - 2\cdot 0\cdot 0 - 1\cdot 4\cdot 1 =$$

$$= 0 - 16 + 0 - 30 - 0 - 4 = -50.$$

Ответ. –50.

Свойства определителей 2-го и 3-го порядка

Сформулируем свойства, справедливые как для определителей 2-го порядка, так и для определителей 3-го порядка.

1. Определитель не изменится, если *все* строки определителя заменить соответствующими столбцами или *все* столбцы определителя заменить соответствующими строками (такое действие над строками и столбцами называется *транспонированием* матрицы):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. При перестановке двух каких-либо строк (или двух столбцов) определитель меняет знак на противоположный.

Например: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$.

3. Общий множитель некоторой строки (или некоторого столбца) можно вынести за знак определителя.

Например: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

4. Определитель, имеющий нулевую строку (или нулевой столбец), равен нулю.

Например: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

5. Определитель, имеющий две одинаковые строки (или два одинаковых столбца), равен нулю.

Например: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = 0$.

6. Определитель, имеющий две пропорциональные строки (или два пропорциональных столбца), равен нулю.

Например: $\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & \lambda a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & \lambda a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$.

7. Если все элементы какой-либо строки (или столбца) представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух соответствующих определителей.

Например: $\begin{vmatrix} b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

8. Определитель *не изменится*, если к какой-либо строке (или столбцу) прибавить другую строку (или столбец), умноженную на любое число.

Например: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + \lambda a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + \lambda a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + \lambda a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$.

9. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали (треугольной матрицей называется квадратная матрица, все элементы которой ниже или выше главной диагонали равны нулю):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}.$$

Доказательство этих свойств для определителей 2-го и 3-го порядка основано на применении формулы для их вычисления (для 3-го порядка — правила Саррюса). В качестве примера проведем доказательство свойств 3, 6 и 8.

Доказательство свойства 3.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}\lambda a_{33} + a_{12}\lambda a_{23}a_{31} + \lambda a_{13}a_{21}a_{32} - \lambda a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}\lambda a_{33} - a_{11}\lambda a_{23}a_{32} =$$

$$= \lambda(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}) =$$

$$= \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Доказательство свойства 6.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & \lambda a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & \lambda a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{\text{свойство 3}}{=} \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{\text{свойство 5}}{=} \lambda \cdot 0 = 0.$$

Доказательство свойства 8.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + \lambda a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + \lambda a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + \lambda a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{\text{свойство 7}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & \lambda a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & \lambda a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$\overset{\text{свойство 6}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + 0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Аналогично доказываются и остальные свойства.

1.2. Разложение определителей по строкам и столбцам

Миноры и алгебраические дополнения

Дана матрица 3-го порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Определение 1.3. ***Минором M_{ij} элемента a_{ij}*** матрицы 3-го порядка называется определитель матрицы 2-го порядка, полученной из данной матрицы путем вычеркивания i-й строки и j-го столбца, на пересечении которых находится a_{ij}.

Имеем:

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}; \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow M_{31} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}; \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{pmatrix} \Rightarrow M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Определение 1.4. ***Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij}*** называется число, равное

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Имеем: $A_{11} = M_{11}$, $A_{12} = -M_{12}$, $A_{13} = M_{13}$, $A_{21} = -M_{21}$, $A_{22} = M_{22}$, $A_{23} = -M_{23}$, $A_{31} = M_{31}$, $A_{32} = -M_{32}$, $A_{33} = M_{33}$.

Правило выбора знака: $\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$.

Пример 1.3. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -8,\ A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -10,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 6,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 23,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -5.$$

Аналогично определяются миноры и алгебраические дополнения элементов матрицы 2-го порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$:

$$M_{11} = |(a_{22})| = a_{22},\ M_{12} = |(a_{21})| = a_{21},\ M_{21} = |(a_{12})| = a_{12},\ M_{22} = |(a_{11})| = a_{11};$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = a_{22},\ A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -a_{21},$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -a_{12},\ A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = a_{11}.$$

Для удобства дальнейших выкладок введем обозначения: S_i — i-я строка матрицы, C_j — j-й столбец матрицы ($i, j = 1, 2$ или $i, j = 1, 2, 3$).

Теорема 1.1 (разложения). *Определитель (2-го и 3-го порядка) равен сумме произведений элементов какой-нибудь строки (или столбца) на их алгебраические дополнения.*

Имеем: $\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \Rightarrow$

$\Delta = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12}$ — разложение по 1-й строке (по S_1);
$\Delta = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22}$ — разложение по 2-й строке (по S_2);
$\Delta = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21}$ — разложение по 1-му столбцу (по C_1);
$\Delta = a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22}$ — разложение по 2-му столбцу (по C_2);

$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow$

$\Delta = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$ — разложение по 1-й строке (по S_1);
$\Delta = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23}$ — разложение по 2-й строке (по S_2);
$\Delta = a_{31} \cdot A_{31} + a_{32} \cdot A_{32} + a_{33} \cdot A_{33}$ — разложение по 3-й строке (по S_3);
$\Delta = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31}$ — разложение по 1-му столбцу (по C_1);
$\Delta = a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32}$ — разложение по 2-му столбцу (по C_2);
$\Delta = a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33}$ — разложение по 3-му столбцу (по C_3).

► ***Доказательство теоремы 1.1*** основано на определении алгебраических дополнений и применении правила Саррюса.

Например, в случае определителя 2-го порядка имеем (разложение по S_1):

$$a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} = a_{11} \cdot a_{22} + a_{12} \cdot (-a_{21}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \Delta.$$

В случае определителя 3-го порядка имеем (разложение по S_1):

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} =$$
$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} = \Delta.$$

Аналогично доказываются остальные равенства. ◄

Пример 1.4. Вычислим определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$: а) путем разложения по строке и столбцу; б) с использованием свойств определителя.

Решение. а) Разложение по 1-й строке (по S_1):

$$\Delta = 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 16 - 30 = -50.$$

Разложение по 3-му столбцу (по C_3):

$$\Delta = 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -30 - 20 + 0 = -50.$$

б) Прибавим к 3-й строке удвоенную 1-ю строку ($S_3 + 2S_1$):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{разложение} \\ \text{по } C_1}}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 0 + 0 = -50.$$

Ответ. $\Delta = -50$.

Теорема 1.2 (аннулирования). *Для матриц (2-го и 3-го порядка) сумма произведений элементов какой-нибудь строки (или столбца) на алгебраические дополнения другой строки (столбца) равна нулю.*

Имеем: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$a_{11} \cdot A_{21} + a_{12} \cdot A_{22} = 0;$
$a_{21} \cdot A_{11} + a_{22} \cdot A_{12} = 0;$
$a_{11} \cdot A_{12} + a_{21} \cdot A_{22} = 0;$
$a_{12} \cdot A_{11} + a_{22} \cdot A_{22} = 0;$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$a_{11} \cdot A_{21} + a_{12} \cdot A_{22} + a_{13} \cdot A_{23} = 0;$
$a_{11} \cdot A_{21} + a_{12} \cdot A_{22} + a_{13} \cdot A_{23} = 0;$
$a_{21} \cdot A_{11} + a_{22} \cdot A_{12} + a_{23} \cdot A_{13} = 0;$
$a_{21} \cdot A_{31} + a_{22} \cdot A_{32} + a_{23} \cdot A_{33} = 0;$
$a_{31} \cdot A_{11} + a_{32} \cdot A_{12} + a_{33} \cdot A_{13} = 0;$
$a_{31} \cdot A_{21} + a_{32} \cdot A_{22} + a_{33} \cdot A_{23} = 0;$
$a_{11} \cdot A_{12} + a_{21} \cdot A_{22} + a_{31} \cdot A_{32} = 0;$
$a_{11} \cdot A_{13} + a_{21} \cdot A_{23} + a_{31} \cdot A_{33} = 0;$
$a_{12} \cdot A_{11} + a_{22} \cdot A_{21} + a_{32} \cdot A_{31} = 0;$
$a_{12} \cdot A_{13} + a_{22} \cdot A_{23} + a_{32} \cdot A_{33} = 0;$
$a_{13} \cdot A_{11} + a_{23} \cdot A_{21} + a_{33} \cdot A_{31} = 0;$
$a_{13} \cdot A_{12} + a_{23} \cdot A_{22} + a_{33} \cdot A_{32} = 0.$

► ***Доказательство теоремы 1.2.*** Для матрицы 2-го порядка имеем:

$$a_{11} \cdot A_{21} + a_{12} \cdot A_{22} = a_{11} \cdot (-a_{12}) + a_{12} \cdot a_{11} = 0;$$
$$a_{21} \cdot A_{11} + a_{22} \cdot A_{12} = a_{21} \cdot a_{22} + a_{22} \cdot (-a_{21}) = 0;$$
$$a_{11} \cdot A_{12} + a_{21} \cdot A_{22} = a_{11} \cdot (-a_{21}) + a_{21} \cdot a_{11} = 0;$$
$$a_{12} \cdot A_{11} + a_{22} \cdot A_{21} = a_{12} \cdot a_{22} + a_{22} \cdot (-a_{12}) = 0.$$

Для матрицы 3-го порядка докажем первое равенство $a_{11} \cdot A_{21} + a_{12} \cdot A_{22} + a_{13} \cdot A_{23} = 0$.

Рассмотрим матрицу $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ x & y & z \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, где первая и третья строки — такие же, как и у матрицы A, а вторая строка содержит произвольные переменные x, y, z.

Разложим определитель матрицы B по второй строке (по S_2):

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ x & y & z \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = xA_{21} + yA_{22} + zA_{23}.$$

Если вместо переменных x, y, z подставить числа: $x = a_{11}$, $y = a_{12}$, $z = a_{13}$, то получим

$$\det B = a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

так как определитель содержит две одинаковые строки. Таким образом, первое равенство доказано. Остальные равенства доказываются аналогично. ◄

1.3. Определители 4-го порядка

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ — матрица 4-го порядка; a_{ij} — элементы матрицы, $i, j = 1, ..., 4$. Введем понятие определителя 4-го порядка, используя понятия миноров и алгебраических дополнений.

Определение 1.5. ***Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы 4-го порядка*** называется определитель матрицы 3-го порядка, полученной из данной матрицы путем вычеркивания i-й строки и j-го столбца, на пересечении которых находится a_{ij}.

Имеем:

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \Rightarrow M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \Rightarrow M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & \boxed{a_{42}} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \Rightarrow M_{42} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

и т.д.

Определение 1.6. ***Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы 4-го порядка*** называется число, равное $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

Например: $A_{11} = M_{11}$, $A_{23} = -M_{23}$, $A_{42} = M_{42}$, $A_{34} = -M_{34}$ и т.д.

Правило выбора знака: $\begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$.

Пример 1.5. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда имеем:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&0&-3\\5&-2&4\\1&3&0\end{vmatrix}\overset{\substack{\text{разложение}\\ \text{по } S_1}}{=}2\cdot\begin{vmatrix}-2&4\\3&0\end{vmatrix}+0-3\cdot\begin{vmatrix}5&-2\\1&3\end{vmatrix}=-24-51=-75;$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix}2&-1&0\\1&5&4\\0&1&0\end{vmatrix}\overset{\substack{\text{разложение}\\ \text{по } S_3}}{=}-\left(-1\cdot\begin{vmatrix}2&0\\1&4\end{vmatrix}\right)=8;$$

$$A_{34}=-\begin{vmatrix}2&-1&1\\3&2&0\\0&1&3\end{vmatrix}\overset{[C_2+C_3]}{=}-\begin{vmatrix}2&0&1\\3&2&0\\0&4&3\end{vmatrix}\overset{[C_1-2C_3]}{=}-\begin{vmatrix}0&0&1\\3&2&0\\-6&4&3\end{vmatrix}=$$

$$\overset{\substack{\text{разложение}\\ \text{по } S_1}}{=}-\left(1\begin{vmatrix}3&2\\-6&4\end{vmatrix}\right)=-\begin{vmatrix}3&2\\-6&4\end{vmatrix}=-24.$$

Теорема 1.3. *Сумма произведений элементов какой-нибудь строки* (*или столбца*) *матрицы 4-го порядка на их алгебраические дополнения есть величина постоянная* (*т.е. не зависящая от номера строки или столбца*):

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14}=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}+a_{24}A_{24}=$$
$$=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}+a_{34}A_{34}=a_{41}A_{41}+a_{42}A_{42}+a_{43}A_{43}+a_{44}A_{44}=$$
$$=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}+a_{41}A_{41}=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}+a_{42}A_{42}=$$
$$=a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}+a_{43}A_{43}=a_{14}A_{14}+a_{24}A_{24}+a_{34}A_{34}+a_{44}A_{44}.$$

Доказательство этой теоремы можно провести путем непосредственного вычисления каждой из этих сумм. Ввиду громоздкости выкладок эти вычисления опускаем.

Эта постоянная величина, о которой идет речь в теореме, и будет называться определителем 4-го порядка.

Определение 1.7. ***Определителем матрицы 4-го порядка*** называется число, равное сумме произведений элементов какой-нибудь строки (или столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\det A=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}+a_{i4}A_{i4}$$

(разложение по i-й строке, i = 1, 2, 3, 4) или

$$\det A=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}+a_{4j}A_{4j}$$

(разложение по j-му столбцу, j = 1, 2, 3, 4).

Можно доказать (выкладки опускаем), что введенное таким образом понятие определителя 4-го порядка обладает теми же свойствами 1—9, какими обладают и определители 2-го и 3-го порядков. Оказывается, что справедливы также теоремы разложения (по определению) и аннулирования.

Вычисление определителей 4-го порядка намного упрощается, если разумно применить свойства определителей, например получить много нулей в какой-нибудь строке или столбце или привести определитель к треугольному виду.

Пример 1.6. Вычислим определитель $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. Имеем

$$\det A \overset{[S_2 - S_4]}{=} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & -8 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{[S_3 - 3S_4]}{=} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & -8 & 0 \\ 1 & -7 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{\substack{\text{разложение} \\ \text{по } C_4}}{=} 1\cdot(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & -8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix} \overset{[C_1 - 3C_2]}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 15 & -3 & -8 \\ 22 & -7 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{[C_3 - 2C_2]}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 15 & -3 & -2 \\ 22 & -7 & 9 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{разложение} \\ \text{по } S_1}}{=} 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 15 & -2 \\ 22 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 15 & -2 \\ 22 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= -(135 + 44) = -179.$$

Ответ. $\det A = -179$.

1.4. Определители *n*-го порядка

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ — матрица n-го порядка, a_{ij} — элементы матрицы, $i, j = 1, 2, ..., n$.

Введем понятие определителя n-го порядка *индуктивно*, считая уже известным понятие определителя $(n - 1)$-го порядка.

Определение 1.8. ***Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка*** называется определитель матрицы $(n - 1)$-го порядка, полученной из данной матрицы путем вычеркивания i-й строки и j-го столбца, на пересечении которых находится a_{ij}.

Определение 1.9. ***Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка*** называется число, равное $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

Теорема 1.4. *Сумма произведений элементов какой-нибудь строки* (*или столбца*) *матрицы n-го порядка на их алгебраические дополнения есть величина постоянная* (*т.е. не зависящая от номера строки или столбца*):

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj},$$
$$i = 1, 2, ..., n;\ j = 1, 2, ..., n.$$

Это утверждение можно доказать *методом математической индукции* (доказательство опускаем). Постоянная величина, о которой идет речь в данной теореме, и будет называться определителем n-го порядка.

Определение 1.10. ***Определителем матрицы n-го порядка*** называется число, равное сумме произведений элементов какой-нибудь строки (или столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj},$$

$$i = 1, 2, ..., n;\ j = 1, 2, ..., n.$$