

В. П. Попов

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

Часть 2

УЧЕБНИК ДЛЯ АКАДЕМИЧЕСКОГО БАКАЛАВРИАТА

7-е издание, переработанное и дополненное

Рекомендовано Учебно–методическим отделом высшего образования в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по инженерно–техническим направлениям

Рекомендовано Министерством образования и науки Российской Федерации в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по инженерно–техническим направлениям

Книга доступна в электронной библиотечной системе
biblio-online.ru

Москва ■ Юрайт ■ 2019

УДК 621
ББК 32.841я73
П58

Автор:

Попов Вадим Петрович — доктор технических наук, профессор, последнее место работы: советник руководителя Таганрогского технологического института Южного федерального университета по правам студентов и сотрудников.

Попов, В. П.

П58 Основы теории цепей. В 2 ч. Часть 2 : учебник для академического бакалавриата / В. П. Попов. — М.: Издательство Юрайт, 2019.—323с. — Серия: Бакалавр. Академический курс.

ISBN 978-5-534-02156-1 (ч. 2)

ISBN 978-5-534-02155-4

Книга состоит из двух частей и представляет собой учебник по основам теории электрических цепей, предназначенный для оказания методической помощи студентам вузов, обучающихся по направлению «Радиотехника», при их самостоятельной работе по освоению курса теории цепей. В отличие от предыдущих изданий, данное издание учебника включает в себя в качестве электронного приложения сборник задач по основам теории цепей, который ранее издавался в виде отдельной книги.

В книге изложены основы теории линейных электрических цепей с сосредоточенными и распределенными параметрами в установившемся и переходном режимах, а также основы анализа нелинейных резистивных цепей на постоянном токе и при гармоническом воздействии. Рассмотрены цепи с управляемыми источниками, не взаимные четырехполюсники, идеальные операционные усилители, преобразователи сопротивления и активные фильтры.

Соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования.

Учебник может использоваться не только при обучении студентов направления «Радиотехника», но и студентов родственных специальностей, в частности, студентов направления «Телекоммуникации», а также может быть полезен инженерам и научным сотрудникам, работающим в смежных областях знания и самостоятельно изучающим методы анализа и основы синтеза электрических цепей.

УДК 621
ББК 32.841я73



Все права защищены. Никакая часть данной книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме без письменного разрешения владельцев авторских прав. Правовую поддержку издательства обеспечивает юридическая компания «Дельфи».

ISBN 978-5-534-02156-1 (ч. 2)
ISBN 978-5-534-02155-4

© Попов В. П., 2007
© Попов В. П., 2012, с изменениями
© ООО «Издательство Юрайт», 2019

Оглавление

Глава 6. Методы анализа переходных процессов в линейных цепях с сосредоточенными параметрами	5
6.1. Задача анализа переходных процессов ¹	5
6.2. Классический метод анализа переходных процессов	14
6.3. Операторный метод анализа переходных процессов	35
6.4. Операторные характеристики линейных цепей	49
6.5. Временные характеристики линейных цепей	59
6.6. Применение принципа наложения для анализа неустановившихся и переходных процессов в линейных цепях	71
Глава 7. Основы теории четырехполюсников и многополюсников	80
7.1. Многополюсники и цепи с многополюсными элементами	80
7.2. Основные уравнения и системы первичных параметров проходных четырехполюсников	114
7.3. Характеристические параметры и комплексные частотные характеристики неавтономных проходных четыреполюсников	139
7.4. Невзаимные проходные четырехполюсники	153
7.5. Электрические фильтры	177
Глава 8. Цепи с распределенными параметрами	192
8.1. Задача анализа цепей с распределенными параметрами ..	192
8.2. Однородная длинная линия при гармоническом внешнем воздействии	196
8.3. Операторные и комплексные частотные характеристики однородных длинных линий	214
8.4. Переходные процессы в цепях с распределенными параметрами	224
8.5. Цепи с распределенными параметрами специальных типов	234

¹ Каждый параграф учебника сопровождается «Вопросами для самопроверки» или «Вопросами и заданиями для самопроверки».

Глава 9. Синтез электрических цепей	243
9.1. Задача синтеза линейных электрических цепей	243
9.2. Основные свойства и критерии физической реализуемости операторных входных характеристик линейных пассивных цепей	246
9.3. Методы реализации реактивных двухполюсников	257
9.4. Основы синтеза линейных пассивных четырехполюсников	266
Глава 10. Методы автоматизированного анализа цепей	277
10.1. Задача автоматизированного анализа цепей	277
10.2. Компонентные и топологические матрицы электрической цепи	281
10.3. Методы формирования уравнений электрического равновесия, предназначенные для применения в программах автоматизированного анализа цепей	296
10.4. Особенности современных программ автоматизированного анализа цепей	309
Заключение	314
Приложения	316
Приложение 1. Таблица оригиналов и изображений по Лапласу	316
Приложение 2. Основные уравнения проходных четырехполюсников	318
Приложение 3. Соотношения между первичными параметрами проходных четырехполюсников	319
Приложение 4. Определители систем первичных параметров проходных четырехполюсников	320
Приложение 5. Соотношения между первичными параметрами взаимных и симметричных четырехполюсников	320
Приложение 6. Приставки для образования кратных и дольных единиц	321
Список литературы	322

Глава 6

МЕТОДЫ АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

6.1. Задача анализа переходных процессов

Возникновение переходных процессов. Понятие о коммутации. Как отмечалось ранее, в установившемся режиме токи и напряжения всех ветвей электрической цепи изменяются по периодическому закону или в частном случае сохраняют неизменные значения. Всякое изменение, как топологии цепи, так и параметров входящих в нее элементов (подключение или отключение отдельных ветвей, изменение параметров пассивных элементов или параметров источников энергии), нарушает периодический характер изменения токов и напряжений ветвей, т.е. приводит к тому, что режим работы цепи становится неустановившимся. Любое скачкообразное изменение в цепи, нарушающее установившийся режим, будем называть *коммутацией*. Если внешнее воздействие на цепь и после коммутации имеет периодический характер, то с течением времени (теоретически через бесконечно большой промежуток времени) цепь перейдет в новый установившийся режим. Неустановившиеся процессы, которые имеют место в цепи при переходе от одного установившегося режима к другому, называются *переходными*.

При анализе переходных процессов в цепи, как правило, можно пренебречь длительностью процесса коммутации, т.е. считать, что коммутация осуществляется практически мгновенно. Начало отсчета времени переходного процесса $t = 0$ обычно совмещают с моментом коммутации, причем через $t = 0_-$ обозначают момент времени, непосредственно предшествующий коммутации, а через $t = 0_+$ — момент времени, следующий непосредственно за коммутацией (начальный момент времени после коммутации).

Переходные процессы, связанные с изменением топологии цепи или различными коммутациями пассивных элементов, присущи в основном устройствам производства, передачи и преобразования электрической энергии.

Для радиотехнических устройств более характерен режим, когда топология цепи и параметры пассивных элементов неизменны, а внешнее воздействие на цепь изменяется по произвольному (чаще всего непериодическому) закону.

При анализе неустановившихся процессов в радиотехнических цепях начало отсчета времени выбирают, исходя из постановки задачи, независимо от того, находилась ли цепь до этого момента времени в установившемся режиме или нет. Для единства терминологии начало отсчета времени неустановившихся процессов, имеющих место в радиотехнических цепях, обычно также называют *моментом коммутации*.

Законы коммутации. Переход реальной электрической цепи от одного установившегося режима к другому не может происходить мгновенно, скачком. Это объясняется тем, что каждому установившемуся состоянию цепи соответствует определенное значение энергии, запасенной в электрическом и магнитном полях. Скачкообразный переход от одного установившегося режима к другому потребовал бы скачкообразного изменения запасенной энергии, что, учитывая выражение (1.5), возможно, только если источники энергии обладают бесконечно большой мощностью, т.е. отдаваемые ими токи или напряжения могут принимать бесконечно большие значения. В связи с тем, что любой реальный источник энергии может отдавать только конечную мощность, суммарная энергия, запасенная в цепи, может изменяться только плавно, т.е. представляет собой непрерывную функцию времени.

Следовательно, возникновение переходных процессов при переходе электрической цепи от одного установившегося состояния к другому связано с тем, что энергия, запасенная реактивными элементами цепи, не может изменяться скачком, а изменяется только плавно, т.е. с конечной скоростью.

Отсюда следует, что в резистивной цепи (в цепи, не содержащей реактивных элементов) процесс перехода от одного установившегося состояния к другому должен происходить мгновенно. Таким образом, переходные процессы в безреактивных цепях отсутствуют. Очевидно, что такие цепи можно рассматривать только в качестве очень упрощенных моде-

лей реальных цепей, поэтому в любой реальной цепи переход от одного установившегося режима к другому всегда сопровождается переходными процессами.

Как известно, энергия, запасенная реактивными элементами цепи, определяется токами индуктивностей и напряжениями емкостей. Исходя из того, что запасенная энергия является непрерывной функцией времени, приходим к заключению о непрерывности во времени токов индуктивностей и напряжений емкостей. Этот вывод имеет исключительно важное значение в теории цепей и формулируется в виде законов (правил) коммутации.

Первый закон коммутации: в начальный момент времени после коммутации ток индуктивности сохраняет такое же значение, как и непосредственно перед коммутацией:

$$i_L(0_+) = i_L(0_-), \quad (6.1)$$

а затем плавно изменяется, начиная с этого значения.

Второй закон коммутации: в начальный момент времени после коммутации напряжение емкости сохраняет такое же значение, как и непосредственно перед коммутацией:

$$u_C(0_+) = u_C(0_-), \quad (6.2)$$

а затем плавно изменяется, начиная с этого значения.

Законы коммутации не накладывают ограничений на характер изменения токов емкостей, напряжений индуктивностей и токов или напряжений сопротивлений, которые могут изменяться произвольным образом, в том числе и скачкообразно.

Как известно, в теории цепей рассматриваются процессы, имеющие место в идеализированных цепях при идеализированных внешних воздействиях. Применение чрезмерно упрощенных моделей элементов цепей и внешних воздействий может привести к нарушению предпосылок, использованных при формулировании законов коммутации, и вследствие этого к нарушению самих законов. Так, представляют интерес случаи, когда идеализированные источники энергии в течение бесконечно короткого промежутка времени могут отдавать бесконечно большой ток или напряжение, т.е. развивать бесконечно большую мощность. При таких внешних воздействиях законы коммутации нарушаются, и токи индуктивностей или напряжения емкостей изменяются скачкообразно (см. п. 6.5).

Законы коммутации могут не выполняться и при некоторых коммутациях, затрагивающих ветви, содержащие реактивные элементы. Коммутации такого типа называются *некорректными*. Анализ процессов в цепях при некорректных коммутациях производят с использованием принципов непрерывности потокосцепления и электрического заряда, которые имеют более общий характер, чем законы коммутации: *алгебраическая сумма потокосцеплений индуктивностей в любом замкнутом контуре электрической цепи и алгебраическая сумма зарядов емкостей, подключенных к любому узлу электрической цепи, являются непрерывными функциями времени*

$$\sum \Psi(0_+) = \sum \Psi(0_-); \quad \sum q(0_+) = \sum q(0_-). \quad (6.3)$$

Следует подчеркнуть, что *некорректность коммутации возникает вследствие излишне упрощенного рассмотрения процесса коммутации или в результате применения чрезмерно упрощенных моделей элементов и может быть устранена при более строгом анализе.*

Таким образом, термин «некорректная коммутация» является не вполне удачным: правильнее говорить не о некорректной коммутации, а о некорректной постановке задачи коммутации.

Пример 6.1. Рассмотрим процесс зарядки конденсатора от гальванического элемента. Если использовать последовательные схемы замещения конденсатора и источника энергии (рис. 6.1, *a*), то переключение ключа S из положения 1 в положение 2 (или наоборот) является корректной коммутацией.

Действительно, пусть в исходном состоянии ключ находится в положении 1 и емкость C полностью разряжена, а в момент времени $t = 0$ ключ перебрасывается в положение 2. Если бы в результате коммутации напряжение на емкости возросло скачком, то в соответствии с компонентным уравнением емко-

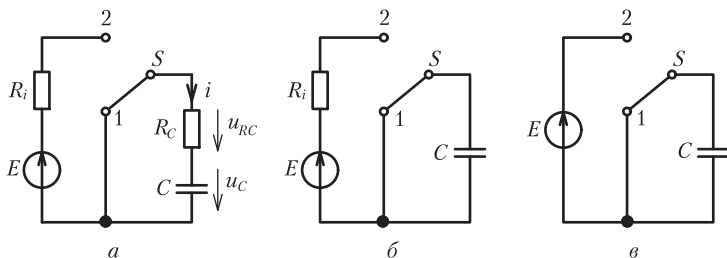


Рис. 6.1. К примеру 6.1

сти (1.13) ток цепи достиг бы бесконечно большого значения, а это привело бы к тому, что левая часть уравнения баланса напряжений для цепи, получающейся после коммутации, $u_C + (R_C + R_i)i = E$, не равнялась бы правой части.

Таким образом, предположение о том, что в цепи нарушается второй закон коммутации, приводит к явно неправильному результату. Следовательно, в начальный момент времени после коммутации напряжение на емкости сохраняет то же значение, что и в момент времени, непосредственно предшествующий коммутации: $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$, а затем плавно увеличивается, стремясь в пределе к новому установившемуся значению, равному ЭДС источника напряжения (в установившемся режиме ток через емкость равен нулю, и из уравнения баланса напряжений следует, что $u_C = E$).

Если в исходном состоянии ключ находится в положении 2, а емкость C заряжена до напряжения E , то при перебросе ключа в положение 1 напряжение на емкости в начальный момент времени после коммутации сохраняет значение, которое было в момент времени, непосредственно предшествующий коммутации, напряжение на сопротивлении R_C изменяется скачком и становится равным $-u_C(0_+) = -E$, а ток сопротивления скачком возрастает до значения $-i_C(0_+) = -E/R_C$. Затем напряжение и ток емкости плавно уменьшаются, стремясь к нулю.

Если упростить схему замещения конденсатора и исключить из нее сопротивление потерь R_C (рис. 6.1, б), то перевод ключа из положения 1 в положение 2 будет по-прежнему оставаться корректной коммутацией, в то время как перевод ключа из положения 2 в положение 1 станет некорректной коммутацией (некорректность коммутации объясняется тем, что рассматриваемая схема замещения цепи не учитывает потерь энергии в конденсаторе и соединительных проводах, а также энергию, выделяющуюся вместе с искрой между контактами ключа. В зависимости от требуемой точности анализа необходимо либо принять, что напряжение на емкости скачком изменилось от $u_C(0_-) = E$ до нуля, либо применить более сложную схему замещения конденсатора, ключа и соединительных проводников).

Если и далее упрощать схему замещения цепи (исключив из нее внутреннее сопротивление источника R_i) (рис. 6.1, в), то перевод ключа из одного положения в другое всегда будет представлять собой некорректную коммутацию.

Пример 6.2. Рассмотрим идеализированную цепь (рис. 6.2). Пусть в исходном состоянии ключ S находится в положении 1, ток через индуктивность L_1 имеет постоянное значение $i_{L1}(0_-) = E/R$, а ток индуктивности $L_2 - i_{L2}(0_-) = 0$.

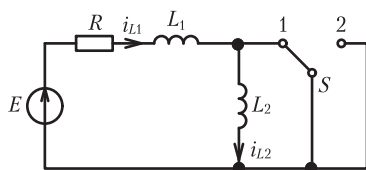


Рис. 6.2. К примеру 6.2

Если в момент времени $t = 0$ ключ S перебросить из положения 1 в положение 2, то индуктивности L_1 и L_2 окажутся включенными последовательно и их токи должны мгновенно уравниваться (для соблюдения баланса токов). Очевидно, что такая коммутация некорректна, причем начальное значение тока индуктивностей $i_{L1}(0_+) = i_{L2}(0_+) = i_L(0_+)$ после коммутации может быть определено из принципа непрерывности потокосцепления: $L_1 i_{L1}(0_+) + L_2 i_{L2}(0_+) = (L_1 + L_2) i_L(0_+) = L_1 i_{L1}(0_-)$, откуда

$$i_L(0_+) = L_1 i_{L1}(0_-) / (L_1 + L_2) = L_1 E / [(L_1 + L_2) R].$$

При анализе такой цепи обычно принимается, что токи индуктивностей L_1 и L_2 скачком изменяются до уровня $i_L(0_+)$, а затем плавно увеличиваются (начиная с этого уровня) до установившегося значения $i_L = E/R$.

Нетрудно убедиться, что энергия данной цепи непосредственно после коммутации

$$w_{L1}(0_+) + w_{L2}(0_+) = (L_1 + L_2) i_L^2(0_+) / 2 = L_1^2 E^2 / [2(L_1 + L_2) R^2]$$

меньше энергии, запасенной в индуктивности L_1 до коммутации:

$$w_{L1}(0_-) = L_1 i_L^2(0_-) / 2 = L_1 E^2 / 2R^2,$$

причем разность между этими величинами равна энергии коммутационных потерь, т.е. потерь, связанных с образованием дуги или искры между контактами. Рассмотренная коммутация может быть сделана корректной, если при анализе принять во внимание конечное время коммутации, применить более точные модели индуктивных катушек, содержащие не только сопротивления потерь, но и паразитные емкости, и учесть явления, имеющие место в дуге между контактами. Разумеется, учет этих явлений существенно усложняет анализ.

Общий подход к анализу переходных процессов. Задача анализа переходных процессов заключается в общем случае в определении мгновенных значений токов и напряжении всех или части ветвей электрической цепи в произвольный момент времени после коммутации. Для этого необходимо найти общее решение основной системы уравнений электрического равновесия цепи или системы уравнений электрического равновесия, составленной любым другим способом,

при $t > 0$. Исключая из системы уравнений все неизвестные величины, кроме одной, получают дифференциальное уравнение цепи, составленное относительно этой величины. Таким образом, задача анализа переходных процессов может быть сведена к решению дифференциального уравнения цепи при $t > 0$. В частности, задача анализа переходных процессов в линейной инвариантной во времени цепи с сосредоточенными параметрами ν -го порядка сводится к нахождению общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения ν -го порядка вида (1.46).

Общее решение такого уравнения содержит ν произвольных постоянных, для нахождения которых необходимо задать значения искомой функции s и ее $\nu - 1$ первых производных в начальный момент времени после коммутации, т.е. при $t = 0_+$. Эти величины определяют с помощью законов коммутации на основании анализа процессов, имеющих место в цепи перед коммутацией. В результате анализа цепи до коммутации рассчитывают токи всех индуктивностей и напряжения всех емкостей в момент времени, непосредственно предшествующий коммутации. Далее, используя законы коммутации (в более общем случае — принципы непрерывности потокоцепления и электрического заряда), находят токи индуктивностей и напряжения емкостей в начальный момент времени после коммутации. Очевидно, что для определения ν начальных условий требуется применить законы коммутации к ν независимо включенным реактивным элементам, т.е. ко всем реактивным элементам, включенным таким образом, что их энергетическое состояние может быть задано независимо. Совокупность начальных значений токов независимо включенных индуктивностей и напряжений независимо включенных емкостей представляет собой *независимые начальные условия цепи*. Используя независимые начальные условия и уравнения электрического равновесия цепи после коммутации, находят *зависимые начальные условия*, т.е. значения токов и напряжений любых ветвей и их производные в момент времени $t = 0_+$.

Если энергия, запасенная в цепи в момент времени, непосредственно предшествующий коммутации, равна нулю, то цепь анализируется *при нулевых начальных условиях*. Если начальный запас энергии не равен нулю, то цепь анализируется *при ненулевых начальных условиях* (в первом случае все независимые начальные условия равны нулю, во втором — хотя бы одно из них имеет ненулевое значение).

Следует обратить внимание на то, что *независимые начальные условия, а следовательно, токи и напряжения ветвей цепи после коммутации определяются исходя из энергетического состояния цепи только в момент времени, непосредственно предшествующий коммутации ($t = 0_-$), и не зависят от характера процессов, имеющих место в цепи до коммутации (при $t < 0$).*

Определение порядка сложности цепи. В некоторых случаях порядок сложности электрической цепи желательно выяснить еще до составления уравнений электрического равновесия. Очевидно, что значение ν не может превышать общего числа реактивных элементов цепи p_{LC} .

Если в цепи имеется *емкостный контур*, т.е. контур, образованный только емкостями или емкостями и независимыми источниками напряжения, то напряжение любой из емкостей такого контура может быть выражено через напряжения других емкостей с помощью уравнения баланса напряжений, составленного для данного емкостного контура. Таким образом, *наличие в цепи емкостного контура уменьшает на единицу число независимо включенных емкостей и снижает порядок сложности цепи.* Частный случай емкостного контура представляют собой две параллельно включенные емкости, которые при определении порядка сложности цепи можно заменить одной эквивалентной емкостью. В то же время энергетическое состояние двух и более последовательно включенных емкостей, не входящих в емкостный контур, можно задать независимо, поэтому каждая из таких емкостей должна учитываться при подсчете ν (см. пример 1.11).

Число независимо включенных реактивных элементов снижается и при наличии в цепи *индуктивного сечения*, т.е. сечения, в которое входят только индуктивности или индуктивности и независимые источники тока. Частным случаем индуктивного сечения является индуктивный узел (узел, к которому подключены только индуктивности или индуктивности и независимые источники тока). *Ток и энергия любой из индуктивностей, входящей в индуктивное сечение, могут быть выражены через токи других индуктивностей на основании уравнения баланса токов, составленного для данного сечения.* Две последовательно включенные индуктивности образуют индуктивное сечение, поэтому при подсчете ν их можно заменить одной.

Если в состав цепи входит несколько емкостных контуров или индуктивных сечений, то при оценке числа независи-

мо включенных реактивных элементов учитывают только независимые емкостные контуры и независимые индуктивные сечения, т.е. такие контуры и сечения, уравнения баланса напряжений и токов которых независимы.

Таким образом, порядок сложности линейной цепи, составленной только из идеализированных пассивных элементов и независимых источников тока или напряжения,

$$v = p_{LC} - n_{\text{ек}} - q_{\text{ис}}, \quad (6.4)$$

где p_{LC} — число реактивных элементов; $n_{\text{ек}}$ — число независимых емкостных контуров; $q_{\text{ис}}$ — число независимых индуктивных сечений.

Следует отметить, что при определении порядка сложности цепи v не учитываются емкостные сечения и индуктивные контуры — топологические особенности такого типа не приводят к уменьшению числа независимо включенных реактивных элементов. Отметим также, что соотношение (6.4) получено в предположении, что компонентные уравнения элементов не вносят дополнительных зависимостей между напряжениями различных емкостей или токами различных индуктивностей. Это условие всегда выполняется для цепей, составленных из пассивных двухполюсных элементов и независимых источников тока или напряжения, однако оно может не выполняться для цепей, содержащих управляемые источники. В этом случае выражение (6.4) позволяет оценить только максимально возможное значение порядка сложности цепи.

Пример 6.3. Определим порядок сложности цепи, схема которой приведена на рис. 6.3.

Общее число реактивных элементов цепи $p_{LC} = 9$, в цепи имеются два независимых емкостных контура $\{C_1, C_3, e\}$, $\{C_3, C_4\}$ и два независимых индуктивных сечения $\{L_1, L_2, L_3\}$, $\{L_3, L_4, L_5\}$. Порядок сложности цепи $v = p_{LC} - n_{\text{ек}} - n_{\text{ис}} = 9 - 2 - 2 = 5$.

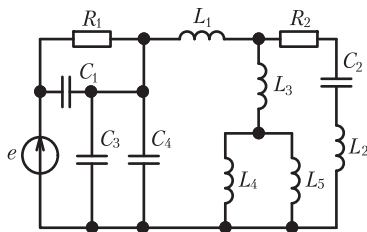


Рис. 6.3. К примеру 6.3

Вопросы для самопроверки

1. Чем отличается неустановившийся режим работы цепи от установившегося? Почему переходный процесс можно рассматривать как разновидность неустановившегося режима?

2. Что представляет собой коммутация в цепи? Чем она вызывается?

3. Возникают ли переходные процессы (ПП) в цепи, не содержащей индуктивных элементов; емкостных элементов; вообще реактивных элементов?

4. Каков физический смысл законов коммутации?

5. Что такое некорректная коммутация?

6. Некорректный означает неправильный. Что же может быть неправильного в коммутации? Или неправильность сокрыта в чем-то другом?

7. Какие уравнения приходится решать в задаче анализа ПП?

8. Что такое зависимые начальные условия в цепи, чем они отличаются от независимых и как используют оба типа начальных условий?

9. Как определяют порядок сложности цепи и почему это важно делать?

10. Что представляют собой: 1) емкостный контур; 2) индуктивное сечение?

11. В каких цепях — реальных или идеализированных — могут иметь место некорректные коммутации? В чем причина возникновения некорректных коммутаций?

12. Какое влияние оказывает топология цепи на порядок сложности цепи? Приведите примеры.

6.2. Классический метод анализа переходных процессов

Свободные и вынужденные составляющие токов и напряжений. Классический метод анализа переходных процессов в линейных инвариантных во времени цепях с сосредоточенными параметрами основан на классическом методе решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Как известно, общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (см. (1.46))

$$a_v \frac{d^v s}{dt^v} + a_{v-1} \frac{d^{v-1} s}{dt^{v-1}} + \dots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s = f(t)$$

может быть представлено в виде суммы какого-либо частного решения этого уравнения и общего решения однородного дифференциального уравнения

$$a_v \frac{d^v s}{dt^v} + a_{v-1} \frac{d^{v-1} s}{dt^{v-1}} + \dots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s = 0, \quad (6.5)$$

которое получается из выражения (1.46) при $f(t) = 0$.

Общее решение однородного дифференциального уравнения (6.5) характеризует так называемые *свободные процессы* в цепи, т.е. процессы в цепи после коммутации в отсутствие внешних источников энергии (напомним (см. п. 1.5), что функция $f(t)$ обращается в нуль при выключении всех независимых источников тока и напряжения).

Таким образом, *характер свободных процессов не зависит от вида внешнего воздействия на цепь, а определяется только параметрами пассивных элементов и линейно управляемых источников, а также топологией цепи после коммутации.*

Свободные процессы в цепи протекают за счет разности энергий, соответствующих установившимся режимам работы цепи до и после коммутации. В связи с тем, что эта разность имеет конечное значение, свободные процессы в цепях с потерями с течением времени затухают (в идеализированных цепях без потерь свободные процессы имеют незатухающий характер).

Частное решение уравнения (1.46) определяет *вынужденный режим* работы цепи, т.е. режим, задаваемый действующими в цепи независимыми источниками энергии. Так как при анализе переходных процессов внешнее воздействие на цепь после коммутации изменяется по периодическому закону или сохраняет неизменное значение, в качестве частного решения (1.46) обычно выбирается установившееся значение реакции цепи s после коммутации, т.е. значение реакции цепи при $t \rightarrow \infty$.

Очевидно, что *вынужденная составляющая не зависит от режима работы цепи до коммутации и, следовательно, от начальных значений токов и напряжений.*

Таким образом, при использовании классического метода анализа переходных процессов искомая реакция цепи s (ток или напряжение какой-либо ветви после коммутации) представляется в виде суммы свободной $s_{\text{св}}$ и вынужденной (принужденной) $s_{\text{вын}}$ составляющих:

$$s = s_{\text{св}} + s_{\text{вын}}$$

Для определения вынужденной составляющей реакции цепи можно воспользоваться рассмотренными ранее мето-

дами анализа линейных цепей в установившемся режиме. Если после коммутации токи независимых источников тока и напряжения независимых источников напряжения не изменяются, то с течением времени в цепи после коммутации установится режим постоянного тока. Очевидно, что в этом случае вынужденная составляющая реакции цепи будет являться постоянным током или напряжением.

Если после коммутации цепь находится под гармоническим воздействием определенной частоты, то вынужденная составляющая реакции цепи также будет гармонической функцией времени и для расчета $s_{\text{вын}}$ можно воспользоваться методом комплексных амплитуд.

Если цепь после коммутации находится под воздействием нескольких независимых источников гармонических колебаний различной частоты, то, используя принцип наложения, мгновенное значение $s_{\text{вын}}$ можно определить как сумму мгновенных значений частичных токов или напряжений, вызванных в установившемся после коммутации режиме каждым из независимых источников в отдельности. Применяя принцип наложения, можно найти вынужденную составляющую реакции цепи и в том случае, когда внешнее воздействие на цепь $x(t)$ описывается периодической функцией более сложного вида, удовлетворяющей условиям Дирихле, т.е. имеющей на конечном интервале конечное число максимумов и минимумов и конечное число разрывов первого рода. При этом функция $x(t)$ может быть разложена в ряд Фурье (представлена в виде суммы гармонических колебаний кратных частот), а мгновенное значение $s_{\text{вын}}$ может быть получено как сумма мгновенных значений частичных токов или напряжений, вызванных в установившемся после коммутации режиме каждой из гармонических составляющих внешнего воздействия в отдельности.

Для определения свободной составляющей $s_{\text{св}}$ реакции цепи необходимо найти v корней p_i характеристического уравнения

$$a_v p^v + a_{v-1} p^{v-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0, \quad (6.6)$$

соответствующего однородному уравнению (6.5). Если все корни уравнения (6.6) простые (различные), свободная составляющая реакции имеет вид

$$s_{\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_v e^{p_v t} = \sum_{i=1}^v A_i e^{p_i t}, \quad (6.7)$$

т.е. каждому простому корню p_i , соответствует слагаемое свободной составляющей вида $s_{св}^{(i)} = A_i e^{p_i t}$, где A_i — постоянная интегрирования.

Если какой-либо корень p_k характеристического уравнения (6.6) имеет кратность n , то этому корню соответствует слагаемое свободной составляющей вида

$$s_{св}^{(i)} = (A_1 + A_2 t + A_3 t^2 + \dots + A_n t^{n-1}) e^{p_k t} = e^{p_k t} \sum_{j=1}^n A_j e^{j-1}. \quad (6.8)$$

Характеристическое уравнение (6.6) может иметь вещественные или комплексно-сопряженные корни, причем все корни p_i характеристического уравнения линейной цепи, составленной из идеализированных пассивных элементов и независимых источников энергии, расположены в левой полуплоскости комплексного переменного p (включая и мнимую ось): $\text{Re}[p_i] \leq 0$, так как только в этом случае свободные процессы в цепи имеют затухающий (точнее, ненарастающий) характер.

Порядок анализа переходных процессов классическим методом. Рассмотрим основные этапы классического метода анализа переходных процессов в линейных инвариантных во времени цепях с сосредоточенными параметрами.

Анализ цепи до коммутации. В результате этого анализа определяют токи индуктивностей и напряжения емкостей в момент времени, непосредственно предшествующий коммутации ($t = 0_-$).

Определение независимых начальных условий. Независимые начальные условия представляют собой токи индуктивностей и напряжения емкостей в момент времени, следующий непосредственно после коммутации ($t = 0_+$). Независимые начальные условия находят с помощью законов коммутации или принципов непрерывности потокосцепления и электрического заряда.

Составление дифференциального уравнения цепи после коммутации (при $t \geq 0$). Дифференциальное уравнение цепи получают из системы уравнений электрического равновесия цепи при $t \leq 0$, составленной любым методом, путем исключения всех неизвестных величин, кроме одной, представляющей собой ток или напряжение какой-либо ветви.

Анализ установившегося процесса в цепи после коммутации. В результате анализа установившегося процесса в цепи после коммутации находят вынужденную составляющую реакции цепи (частное решение дифференциального уравнения цепи при $t \rightarrow \infty$).

Определение свободной составляющей реакции цепи. На этом этапе составляют характеристическое уравнение цепи, находят его корни и определяют общий вид свободной составляющей реакции цепи (общее решение однородного дифференциального уравнения, соответствующего дифференциальному уравнению цепи после коммутации).

Нахождение общего вида реакции цепи. Общий вид реакции цепи (общее решение дифференциального уравнения цепи) находят путем суммирования свободной и вынужденных составляющих реакции цепи.

Определение постоянных интегрирования. Постоянные интегрирования находят, используя зависимые начальные условия (значения искомого тока или напряжений и их $\nu - 1$ первых производных в начальный момент времени после коммутации). Для определения зависимых начальных условий используют независимые начальные условия и уравнения электрического равновесия цепи при $t = 0_+$.

Определение реакции цепи, соответствующей заданным начальным условиям. Подставляя постоянные интегрирования в общее решение дифференциального уравнения цепи после коммутации, находят частное решение дифференциального уравнения, соответствующее заданным начальным условиям, т.е. искомый ток или напряжение одной из ветвей при $t > 0$.

Переходные процессы в последовательной RC-цепи при скачкообразном изменении ЭДС. Рассмотрим переходные процессы в последовательной RC-цепи (рис. 6.4, а) при скачкообразном изменении ЭДС идеализированного источника постоянного напряжения:

$$e(t) = \begin{cases} E_1 & \text{при } t < 0, \\ E_2 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Такое изменение ЭДС источника напряжения происходит, например, когда в цепи, схема которой приведена на рис. 6.4, б, ключ S в момент времени $t = 0$ перебрасывают из положения 1 в положение 2. Очевидно, что в момент времени, непосредственно предшествовавший коммутации, напряжение на емкости равнялось напряжению на зажимах источника энергии при $t < 0$ (предполагается, что до коммутации цепь находилась в установившемся режиме). Используя второй закон коммутации, находим единственное независимое начальное условие:

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = E_1. \quad (6.9)$$

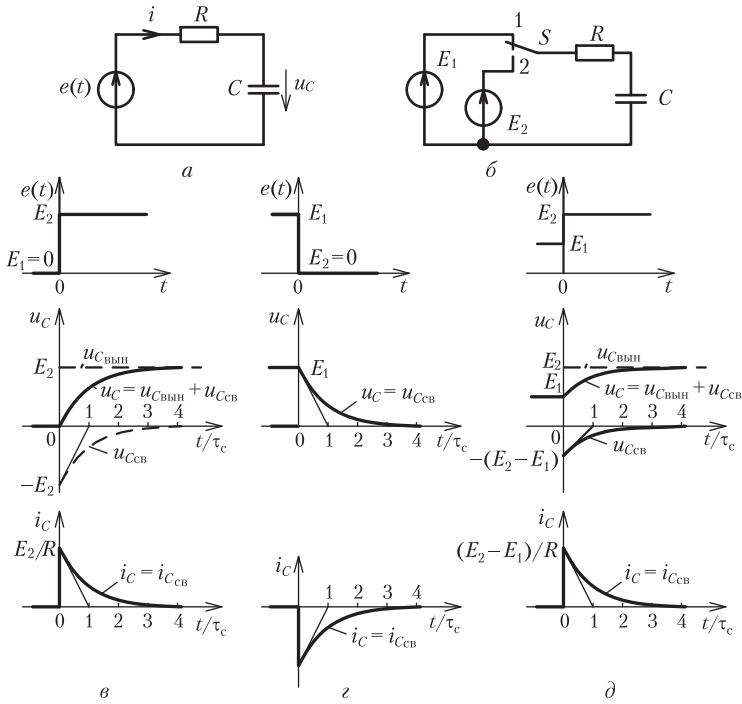


Рис. 6.4. К исследованию переходных процессов в последовательной RC-цепи:

a, б – схемы цепи; *в* – переходные процессы в цепи при $E_1 = 0$;
з – переходные процессы в цепи при $E_2 = 0$; *д* – переходные процессы в цепи при $E_2 - E_1 > 0$

Дифференциальное уравнение рассматриваемой цепи можно составить относительно любой из неизвестных величин (напряжения на сопротивлении u_R , напряжения на емкости u_C , тока сопротивления i_R , тока емкости i_C), однако, учитывая, что для данной цепи известно начальное значение напряжения на емкости, целесообразно составить уравнение относительно этого напряжения.

Исключая из основной системы уравнений электрического равновесия цепи при $t \geq 0$

$$\begin{aligned} u_R + u_C &= E_2; \\ i_C &= i_R = i; \\ i_C &= C \frac{du_C}{dt}; \\ u_R &= Ri_R \end{aligned}$$

все неизвестные величины, кроме u_C , получаем

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E_2.$$

Напряжение на емкости при $t \geq 0$ представим в виде суммы вынужденной $u_{C_{\text{вын}}}$ и свободной $u_{C_{\text{св}}}$ составляющих

$$u_C = u_{C_{\text{вын}}} + u_{C_{\text{св}}}. \quad (6.10)$$

Очевидно, что с течением времени после коммутации в цепи должен установиться режим постоянного тока, причем установившееся значение тока емкости равно нулю (сопротивление емкости постоянному току бесконечно велико), а установившееся значение напряжения емкости — напряжению источника энергии после коммутации. Таким образом, вынужденная составляющая напряжения на емкости

$$u_{C_{\text{вын}}} = E_2. \quad (6.11)$$

Характеристическое уравнение цепи $RCp + 1 = 0$ имеет единственный корень

$$p_1 = -1/(RC) = -1/\tau_C,$$

где $\tau_C = RC$ — постоянная времени последовательной RC -цепи, поэтому свободная составляющая напряжения на емкости u_C содержит один экспоненциальный член:

$$u_{C_{\text{св}}} = A_1 e^{p_1 t} = A_1 e^{-t/\tau_C}. \quad (6.12)$$

Используя выражения (6.10)–(6.12), находим напряжение емкости после коммутации при произвольных начальных условиях:

$$u_C = E_2 + A_1 e^{-t/\tau_C}. \quad (6.13)$$

Для определения постоянной интегрирования A_1 воспользуемся независимым начальным условием (6.9). Полагая в выражении (6.13) $t = 0_+$, $u_C = u_C(0_+) = E_1$, получаем $E_1 = E_2 + A_1$, откуда $A_1 = E_1 - E_2$.

Таким образом, при заданных начальных условиях напряжение на емкости после коммутации ($t \geq 0$) описывается выражением

$$u_C = E_2 - (E_2 - E_1)e^{-t/\tau_C}. \quad (6.14)$$

Зависимость напряжения на емкости от времени при различных соотношениях между E_1 и E_2 показана на рис. 6.4, $\vartheta - \delta$, здесь же дана зависимость от времени тока емкости i_C , которая при $t \geq 0$ определяется путем дифферен-

цирования выражения (6.14) по времени и умножения результата на C :

$$i_C = \frac{E_2 - E_1}{R} e^{-t/\tau_C}. \quad (6.15)$$

Как очевидно из рис. 6.4, $v - \delta$, в начальный момент после коммутации напряжение на емкости сохраняет то же значение, что и до коммутации, а затем плавно изменяется, стремясь в пределе к E_2 . Ток емкости в начальный момент скачком изменяется от нуля до начального значения:

$$i_C(0_+) = (E_2 - E_1)/R, \quad (6.16)$$

а затем плавно уменьшается, стремясь к нулю. В связи с тем, что установившееся значение тока емкости до и после коммутации равно нулю, ток рассматриваемой цепи содержит только свободную составляющую.

Анализ выражения (6.16) показывает, что начальное значение тока емкости $i_C(0_+)$ численно равно постоянному току, который протекал бы в цепи после коммутации, если бы емкость C была заменена идеальным источником напряжения E_1 .

Следовательно, в начальный момент времени после коммутации емкость ведет себя подобно источнику напряжения, ЭДС которого равна начальному значению напряжения на емкости. Если начальное значение напряжения на емкости равно нулю, то в начальный момент после коммутации ветвь с емкостью можно считать короткозамкнутой, т.е. сопротивление емкости при $t = 0_+$ равно нулю.

Далее (см. пример 6.4) будет показано, что в начальный момент времени после коммутации индуктивность ведет себя подобно источнику тока, ток которого равен начальному значению тока через индуктивность. При $i_L(0_-) = 0$ ветвь с индуктивностью в начальный момент времени можно считать разомкнутой, т.е. сопротивление индуктивности при $t = 0_+$ имеет бесконечно большое значение.

Как следует из выражений (6.12) и (6.15), скорость затухания свободных составляющих тока и напряжения емкости не зависит от значений ЭДС идеализированного источника напряжения до и после коммутации, а определяется только постоянной времени цепи τ_C , которая численно равна промежутку времени, в течение которого свободные составляющие тока и напряжения уменьшаются в $e \approx 2,718$ раз. Можно показать, что при любом $t \geq 0$

$$\tau_C = \left| \frac{u_{C_{CB}}}{du_{C_{CB}}/dt} \right| = \left| \frac{i_{C_{CB}}}{di_{C_{CB}}/dt} \right|.$$

Таким образом, постоянная времени рассматриваемой цепи численно равна длине подкасательной к кривой $u_{C_{CB}}$ или $i_{C_{CB}}$ при любом значении $t \geq 0$, т.е. длине отрезка временной оси, заключенного между какой-либо точкой $t = t_1 \geq 0$ и точкой пересечения временной оси и касательной, проведенной к кривой $u_{C_{CB}}$ или $i_{C_{CB}}$ в точке $u_{C_{CB}}(t_1)$ или $i_{C_{CB}}(t_1)$. Для определения постоянной времени цепи касательную к кривым $i_{C_{CB}}$ или $u_{C_{CB}}$ наиболее удобно проводить при $t_1 = 0$. В этом случае она пересекает ось времени в точке $t = \tau_C$ (см. рис. 6.4, в — д).

Чем больше постоянная времени цепи, тем медленнее затухают свободные составляющие токов и напряжений, а следовательно, токи и напряжения цепи медленнее приближаются к установившимся значениям.

Теоретически процесс установления нового режима в цепи длится бесконечно долго. Однако, учитывая, что к моменту времени, равному $3\tau_C$ после коммутации, свободные составляющие уменьшаются до уровня менее 0,05 от начального значения, а к моменту времени, равному $5\tau_C$, — до уровня менее 0,01 от начального значения, переходные процессы в цепи можно считать практически закончившимися через промежуток времени $3 \div 5\tau_C$ после коммутации.

Подключение к последовательной RL -цепи источника гармонического напряжения. Рассмотрим переходные процессы в последовательной RL -цепи, содержащей идеализированный источник, ЭДС которого изменяется во времени по закону

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ E_m \cos(\omega t + \psi) & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (6.17)$$

Временная диаграмма $e(t)$ при $\omega > 0$ приведена на рис. 6.5, а.

В этом случае ток индуктивности в момент времени, непосредственно предшествующий коммутации, $i_L(0_-) = 0$.

Дифференциальное уравнение цепи, составленное относительно тока $i = i_L$, при $t \geq 0$ имеет вид

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E_m \cos(\omega t + \psi). \quad (6.18)$$

Вынужденная составляющая тока может быть найдена с помощью метода комплексных амплитуд:

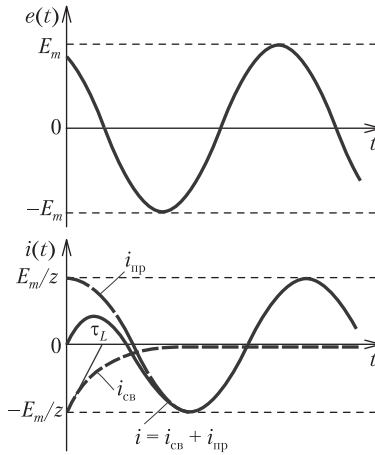


Рис. 6.5. К исследованию переходных процессов при включении источника гармонического напряжения в последовательную RL -цепь

$$i_{\text{вын}} = \frac{E_m}{z} E_m \cos(\omega t + \psi - \varphi),$$

где $z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$, $\varphi = \arctg(\omega L/R)$ — модуль и аргумент комплексного входного сопротивления цепи.

Характеристическое уравнение цепи

$$Lp + R = 0$$

имеет единственный корень $p_1 = -R/L$, поэтому свободная составляющая тока содержит один экспоненциальный член:

$$i_{\text{св}} = A_1 e^{-t/\tau_L},$$

где $\tau_L = L/R$ — постоянная времени последовательной RL -цепи.

Суммируя свободную и вынужденную составляющие, находим общее решение дифференциального уравнения цепи (6.18) после коммутации:

$$i = \frac{E_m}{z} \cos(\omega t + \psi - \varphi) + A_1 e^{-t/\tau_L}. \quad (6.19)$$

Для определения постоянной интегрирования A_1 воспользуемся первым законом коммутации, в соответствии с которым начальное значение тока рассматриваемой цепи должно равняться нулю:

$$i(0_+) = i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0. \quad (6.20)$$

Подставляя равенство (6.20) в выражение (6.19), получаем

$$\frac{E_m}{z} \cos(\psi - \varphi) + A_1 = 0,$$

откуда

$$A_1 = -\frac{E_m}{z} \cos(\psi - \varphi). \quad (6.21)$$

С учетом формулы (6.21) выражение для тока цепи после коммутации принимает вид

$$i = \frac{E_m}{z} \cos(\omega t + \psi - \varphi) - \frac{E_m}{z} [\cos(\psi - \varphi)] e^{-t/\tau_L}.$$

Характер переходных процессов в цепи зависит от соотношения между начальной фазой ψ ЭДС идеализированного источника напряжения и аргументом φ входного сопротивления цепи. Если значения ψ и φ выбраны таким образом, что начальные значения вынужденной $i_{\text{вын}}(0_+)$ и свободной $i_{\text{св}}(0_+)$ составляющих равны нулю ($\psi = \varphi \pm \pi/2$), то свободная составляющая тока тождественно равна нулю. Переходные процессы в цепи в этом случае отсутствуют, т.е. установившийся режим наступает сразу же после коммутации. При $\psi = \varphi$ или $\psi = \varphi \pm \pi$ начальные значения свободной и принужденной составляющих максимальны и различия в форме кривых $i = i(t)$ и $i_{\text{пр}} = i_{\text{пр}}(t)$ выражены наиболее заметно (рис. 6.5, б).

Как и для последовательной RC -цепи, скорость затухания свободной составляющей тока последовательной RL -цепи не зависит от характера внешнего воздействия, а определяется только постоянной времени τ_L . За промежуток времени $t = \tau_L$ свободная составляющая тока уменьшается в e раз и к моменту времени $t = 3 \div 5 \tau_L$ после коммутации переходные процессы в цепи можно считать практически закончившимися.

Подключение к последовательной RLC -цепи источника постоянного напряжения¹. Последовательная RLC -цепь со-

¹ Приведенные здесь результаты можно использовать для анализа переходных процессов в одиночном колебательном контуре. Так как свободные составляющие тока и напряжения контура определяются при выключенных источниках энергии, нетрудно заключить, что характер свободных процессов в одиночном колебательном контуре не зависит от способа подключения контура к источнику энергии, т.е. от того, является ли данный одиночный контур последовательным или параллельным.

держит два независимо включенных реактивных элемента, поэтому процессы в ней описываются дифференциальным уравнением второго порядка, а для определения постоянных интегрирования необходимо задать два независимых начальных условия. Если ЭДС идеального источника напряжения изменяется во времени по закону

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ E = \text{const} & \text{при } t \geq 0, \end{cases}$$

то независимые начальные условия цепи имеют нулевые значения

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0; \quad i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0. \quad (6.22)$$

Составим уравнение электрического равновесия цепи по методу токов ветвей для $t \geq 0$

$$L \frac{di}{dt} + Ri + u_C(0_+) + \frac{1}{C} \int_0^t idt = E. \quad (6.23)$$

Дифференцируя правую и левую части уравнения (6.23), получаем дифференциальное уравнение рассматриваемой цепи после коммутации:

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0. \quad (6.24)$$

Для определения единственного решения этого уравнения, соответствующего заданному режиму работы цепи до коммутации, необходимо найти начальные значения тока цепи и его первой производной по времени. Начальное значение тока цепи совпадает с начальным значением тока индуктивности:

$$i(0_+) = i_L(0_+) = 0, \quad (6.25)$$

а начальное значение первой производной тока цепи по времени может быть найдено с использованием независимых начальных условий (6.22) и уравнения электрического равновесия цепи (6.23) при $t = 0_+$:

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0_+} = \frac{E}{L}. \quad (6.26)$$

В связи с тем, что установившееся значение тока этой цепи после коммутации равно нулю, ток при $t \geq 0$ содержит только свободную составляющую: $i = i_{\text{св}}$.

Характеристическое уравнение последовательной RLC -цепи

$$Lp^2 + Rp + 1/C = 0 \quad (6.27)$$

имеет два корня:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \quad (6.28)$$

где $\delta = R/(2L)$ — коэффициент затухания; $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ — резонансная частота цепи. В зависимости от соотношения между величинами ω_0 и δ или, что то же самое, в зависимости от добротности цепи

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\omega_0}{2\delta},$$

корни характеристического уравнения (6.27) могут быть вещественными различными, комплексно-сопряженными или вещественными одинаковыми (кратными). Рассмотрим каждый из этих случаев.

Вещественные различные корни. При малой добротности последовательной RLC -цепи ($Q < 1/2$, т.е. $R > 2\rho$ и $\delta > \omega_0$) характеристическое уравнение (6.27) имеет два различных вещественных отрицательных корня, а выражение для тока цепи после коммутации ($t \geq 0$) содержит два экспоненциальных члена:

$$i = i_{св} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (6.29)$$

Дифференцируя правую и левую части выражения (6.29) $di/dt = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}$ и используя зависимые начальные условия (6.25), (6.26), составляем уравнения для определения постоянных интегрирования A_1 и A_2 :

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 0; \\ p_1 A_1 + p_2 A_2 &= E/L, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{E}{L(p_1 - p_2)} = \frac{E}{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}; \\ A_2 &= \frac{-E}{L(p_1 - p_2)} = \frac{-E}{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

С учетом уравнений (6.30) выражение для тока цепи после коммутации принимает вид

$$i = \frac{E}{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}).$$

Расположение корней p_1, p_2 характеристического уравнения в плоскости комплексного переменного p и зависимость нормированного тока исследуемой цепи от времени приведены на рис. 6.6, а. Переходный процесс в цепи носит *апериодический* (неколебательный) характер, причем вследствие того, что $|p_1| < |p_2|$, вторая составляющая нормированного тока цепи $i^{(2)}$ затухает быстрее, чем первая $i^{(1)}$.

$$\bar{i} = \frac{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}{E} i = e^{p_1 t} - e^{p_2 t} = \bar{i}^{(1)} + \bar{i}^{(2)}.$$

Комплексно-сопряженные корни. При большой добротности последовательной RLC -цепи ($Q > 1/2$, т.е. $R < 2\rho$ и $\delta < \omega_0$) характеристическое уравнение (6.27) имеет два комплексно-сопряженных корня:

$$p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_{св},$$

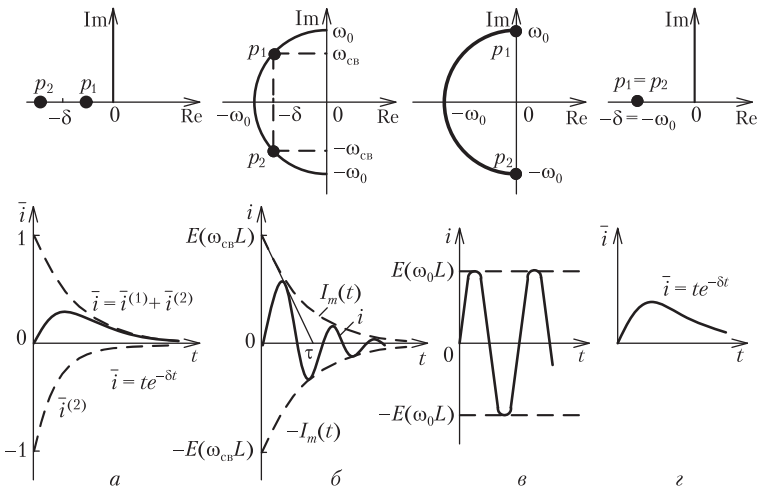


Рис. 6.6. Расположение корней характеристического уравнения в плоскости комплексного переменного и зависимость свободной составляющей тока последовательной RLC -цепи от времени для:

$$a - \delta > \omega_0; \quad б - \delta < \omega_0; \quad в - \delta = 0; \quad г - \delta = \omega_0$$

где $\omega_{\text{св}} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ — частота свободных колебаний в цепи (смысл этого понятия будет ясен из последующего изложения). Ток цепи после коммутации, как и в предыдущем случае, определяется выражением (6.29), которое после нахождения постоянных интегрирования $A_1 = E/(j2\omega_{\text{св}}L)$, $A_2 = -E/(j2\omega_{\text{св}}L)$ может быть с учетом соотношения

$$\frac{e^{j\omega_{\text{св}}t} - e^{-j\omega_{\text{св}}t}}{2j} = \sin \omega_{\text{св}}t$$

преобразовано к виду

$$i = \frac{E}{\omega_{\text{св}}L} e^{-\delta t} \sin \omega_{\text{св}}t = I_m(t) \cos(\omega_{\text{св}}t - \pi/2),$$

где

$$I_m(t) = \frac{Ee^{-\delta t}}{\omega_{\text{св}}L}.$$

Таким образом, при включении в последовательную RLC -цепь с высокой добротностью идеального источника постоянного напряжения переходные процессы в ней имеют *колебательный характер*. Ток цепи представляет собой затухающую гармоническую функцию (точнее, *квазигармоническую функцию*), амплитуда которой $I_m(t)$ экспоненциально уменьшается во времени. Колебательный характер переходного процесса в цепи связан с периодическим обменом энергией между емкостью и индуктивностью, а затухание колебаний объясняется потерями энергии в сопротивлении. Расположение корней p_1 , p_2 характеристического уравнения в плоскости комплексного переменного p и зависимость тока цепи от времени показаны на рис. 6.6, б. Корни характеристического уравнения расположены симметрично относительно действительной оси в левой полуплоскости на полуокружности радиусом, численно равным резонансной частоте последовательного колебательного контура ω_0 . Чем меньше коэффициент затухания δ , тем ближе к мнимой оси расположены корни уравнения, меньше различие между $\omega_{\text{св}}$ и ω_0 и медленнее затухание свободных процессов. В пределе, при $\delta = 0$, корни характеристического уравнения располагаются на мнимой оси, частота свободных колебаний совпадает с резонансной частотой цепи, а колебательные процессы в цепи носят незатухающий характер (рис. 6.6, в). Таким образом, резонансная частота RLC -цепи численно равна частоте свободных колебаний для случая, когда коэффициент затухания $\delta = 0$.

Штриховыми линиями на рис. 6.6, б показаны кривые $\pm I_m(t)$, которые характеризуют закон изменения амплитуды тока во времени. Эти кривые называются *огibaющими*. Величина, численно равная длине подкасательной к огибающей тока $I_m(t)$,

$$\tau = 1/\delta = 2L/R = 2Q/\omega_0 \quad (6.31)$$

называется *постоянной времени* последовательной RLC -цепи.

Очевидно, что за промежуток времени $t = \tau$ ордината огибающей тока уменьшается в e раз. Из сравнения выражений (6.31) и (3.69) следует, что *постоянная времени последовательной RLC -цепи обратно пропорциональна половине полосы пропускания одиночного колебательного контура на уровне $1/\sqrt{2}$* :

$$\tau = 2Q/\omega_0 = 2/\Pi_\omega.$$

Таким образом, чем уже полоса пропускания контура, тем медленнее затухают в нем свободные составляющие токов и напряжений

Скорость затухания свободных процессов в рассматриваемой цепи может быть охарактеризована также *логарифмическим декрементом колебаний* θ , который равен натуральному логарифму отношения двух максимальных значений тока, взятых через период свободных колебаний $T_{св} = 2\pi/\omega_{св} = 2\pi\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.

Найдя натуральный логарифм отношения ординат огибающих тока для $t_1 \geq 0$ и $t_1 + T_{св}$, можно прийти к выводу, что логарифмический декремент колебаний не зависит от выбора t_1 , а определяется только добротностью цепи Q :

$$\theta = \ln \frac{I_m(t_1)}{I_m(t_1 + T_{св})} = \delta T_{св} = \frac{2\pi\delta}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{Q^2 - 0,25}}.$$

Анализ данного выражения показывает, что логарифмический декремент колебаний равен нулю при $\delta = 0$ ($Q = \infty$) и обращается в бесконечность при $\delta = \omega_0$ ($Q = 1/2$).

Определим отношение 3τ (промежуток времени, за который свободные составляющие уменьшаются до уровня 5% от начального значения) к периоду свободных колебаний $T_{св}$:

$$\frac{3\tau}{T_{св}} = 3 \frac{2L}{R} \frac{\omega_{св}}{2\pi} = \frac{3}{\pi} \frac{\omega_{св}L}{R} \approx Q.$$

Следовательно, *добротность одиночного колебательного контура приближенно равна числу периодов свободных коле-*

баний, укладывающихся на интервале затухания свободных составляющих до уровня 5% от начального.

Кратные корни. При $Q = 1/2$, т.е. при $R = 2\rho$ и $\delta = \omega_0$, характеристическое уравнение последовательной RLC -цепи имеет два одинаковых вещественных корня $p_1 = p_2 = -\delta$, расположенных на отрицательной вещественной полуоси в плоскости комплексного переменного p (рис. 6.6, z). Как следует из выражения (6.8), общее решение дифференциального уравнения (6.24) при $t \geq 0$ в этом случае имеет вид

$$i = i_{\text{св}} = (A_1 + A_2)e^{-\delta t}. \quad (6.32)$$

Определяя с помощью зависимых начальных условий (6.25) и (6.26) значения постоянных интегрирования $A_1 = 0$, $A_2 = E/L$ и подставляя их в выражение (6.32), окончательно получаем

$$i = Ete^{-\delta t}/L.$$

Как и в случае вещественных различных корней, переходный процесс в цепи при одинаковых вещественных корнях имеет аperiodический характер (см. рис. 6.6, z), поэтому условие $Q = 1/2$ является предельным условием существования в цепи аperiodических свободных процессов. Режим работы цепи на границе между колебательным и аperiodическим переходными процессами называется *критическим*.

Таким образом, *характер переходных процессов в последовательной RLC -цепи полностью определяется расположением корней характеристического уравнения в плоскости комплексного переменного.*

Описанная зависимость характера переходных процессов в цепи второго порядка от расположения корней характеристического уравнения в плоскости комплексного переменного присуща не только последовательной RLC -цепи, она является общим свойством линейных электрических цепей любого порядка сложности.

Подключение к последовательной RLC -цепи источника гармонического напряжения. Рассмотрим важный для практики случай включения источника гармонического напряжения в последовательную RLC -цепь с высокой добротностью ($Q \gg 1/2$). Свободные процессы в такой цепи, как было установлено выше, имеют колебательный характер. Пусть идеализированный источник напряжения включен в цепь в момент времени $t = 0$ (см. выражение (6.17)), причем примем, что мгновенное значение ЭДС этого источника

при $t = 0$ равно нулю ($\psi = -\pi/2$). Уравнение баланса напряжений такой цепи после коммутации имеет вид

$$L \frac{di}{dt} + Ri + u_C(0_+) + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = E_m \sin \omega t, \quad (6.33)$$

а дифференциальное уравнение цепи

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \omega E_m \cos \omega t. \quad (6.34)$$

Для решения уравнения (6.34) необходимо определить начальные значения тока цепи $i(0_+)$ и его первой производной по времени $\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0_+}$.

Используя независимые начальные условия

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0; \quad i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$$

и уравнение электрического равновесия (6.33), получаем

$$i(0_+) = i_L(0_+) = 0; \quad \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0_+} = 0. \quad (6.35)$$

Суммируя вынужденную и свободную составляющие тока

$$i_{\text{вын}} = I_{m \text{ вын}} \cos(\omega t + \psi - \varphi) = I_{m \text{ вын}} \sin(\omega t - \varphi); \quad (6.36)$$

$$i_{\text{св}} = A_1 e^{-(\delta - j\omega_{\text{св}})t} + A_2 e^{-(\delta + j\omega_{\text{св}})t}, \quad (6.37)$$

находим общее решение уравнения (6.34) при $t \geq 0$:

$$i = I_{m \text{ вын}} \sin(\omega t - \varphi) + (A_1 e^{j\omega_{\text{св}}t} + A_2 e^{-j\omega_{\text{св}}t}) e^{-\delta t}, \quad (6.38)$$

где $I_{m \text{ вын}} = E_m / \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$ — амплитуда вынужденной составляющей тока; $\varphi = \arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$ — аргумент комплексного входного сопротивления рассматриваемой цепи.

Для определения постоянных интегрирования A_1, A_2 продифференцируем правую и левую части выражения (6.38):

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} = \omega I_{m \text{ вын}} \cos(\omega t - \varphi) - A_1 (\delta - j\omega_{\text{св}}) e^{-(\delta - j\omega_{\text{св}})t} - \\ - A_2 (\delta + j\omega_{\text{св}}) e^{-(\delta + j\omega_{\text{св}})t} \end{aligned} \quad (6.39)$$

и подставим в выражения (6.38) и (6.39) зависимые начальные условия (6.35). Решая полученную таким образом систему уравнений относительно A_1 , и A_2 , получаем

$$A_1 = \frac{(\delta + j\omega_{\text{св}})\sin\varphi - \omega\cos\varphi}{2j\omega_{\text{св}}} I_{m \text{ вын.}}, \quad (6.40)$$

$$A_2 = \frac{\omega\cos\varphi - (\delta - j\omega_{\text{св}})\sin\varphi}{2j\omega_{\text{св}}} I_{m \text{ вын.}}$$

С учетом соотношений (6.40) выражение (6.37) для свободной составляющей тока может быть преобразовано к виду

$$i_{\text{св}} = \left[\frac{e^{j\omega_{\text{св}}t} + e^{-j\omega_{\text{св}}t}}{2} \sin\varphi + \right. \\ \left. + \left(\frac{\delta\sin\varphi}{\omega_{\text{св}}} - \frac{\omega\cos\varphi}{\omega_{\text{св}}} \right) \frac{e^{j\omega_{\text{св}}t} - e^{-j\omega_{\text{св}}t}}{2j} \right] I_{m \text{ вын.}} e^{-\delta t} = \quad (6.41)$$

$$= \left[\sin\varphi \cos\omega_{\text{св}}t + \left(\frac{\delta\sin\varphi}{\omega_{\text{св}}} - \frac{\omega\cos\varphi}{\omega_{\text{св}}} \right) \sin\omega_{\text{св}}t \right] I_{m \text{ вын.}} e^{-\delta t}.$$

Предположим, что частота внешнего воздействия ω близка к частоте свободных колебаний $\omega_{\text{св}}$, а добротность Q настолько велика, что $\omega_{\text{св}}$ практически совпадает с резонансной частотой цепи ω_0 .

С учетом этих допущений, которые незначительно уменьшают общность получаемых результатов, выражение (6.41) существенно упрощается:

$$i_{\text{св}} = (\sin\varphi \cos\omega_0 t - \cos\varphi \sin\omega_0 t) I_{m \text{ вын.}} e^{-\delta t} = \\ = -I_{m \text{ вын.}} e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t - \varphi).$$

Таким образом, в последовательной RLC -цепи, удовлетворяющей принятым допущениям, свободная составляющая тока является затухающей гармонической функцией времени. В начальный момент времени амплитуда свободной составляющей тока равна амплитуде вынужденной составляющей, а затем уменьшается по экспоненциальному закону. Через промежуток времени, равный $3 \div 5\tau$ после коммутации, амплитуда свободной составляющей становится пренебрежительно малой по сравнению с амплитудой вынужденной составляющей, и переходный процесс в цепи можно считать практически закончившимся.

Ток цепи после коммутации равен сумме свободной и вынужденной составляющих:

$$i = I_{m \text{ вын.}} \sin(\omega t - \varphi) - I_{m \text{ вын.}} e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t - \varphi). \quad (6.42)$$

Если частота внешнего воздействия совпадает с резонансной частотой цепи ω_0 , то входное сопротивление цепи име-