И. В. Садовничая, Е. В. Хорошилова

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ: ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Часть 1

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ АКАДЕМИЧЕСКОГО БАКАЛАВРИАТА

2-е издание, переработанное и дополненное

Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по математическим и естественнонаучным направлениям

Книга доступна в электронной библиотечной системе
biblio-online.ru

Москва ▪ Юрайт ▪ 2019

УДК 517.9(075.8)
ББК 22.161я73
С14

***Авторы*:**

Садовничая Инна Викторовна — доцент, доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова;

Хорошилова Елена Владимировна — доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

***Рецензенты*:**

Ильин В. А. — доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН, Международной академии наук высшей школы; лауреат Государственной премии СССР и Премии Президента Российской Федерации в области образования;

Фоменко Т. Н. — доктор физико-математических наук;

Фомичев В. В. — профессор, доктор физико-математических наук, заместитель заведующего кафедрой нелинейных динамических систем и процессов управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова;

Соколов Н. В. — доктор физико-математических наук.

Садовничая, И. В.

С14 Математический анализ: определенный интеграл. В 2 ч. Часть 1 : учеб. пособие для академического бакалавриата / И. В. Садовничая, Е. В. Хорошилова. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 242 с. — (Серия : Бакалавр. Академический курс).

ISBN 978-5-534-05714-0 (ч. 1)
ISBN 978-5-534-05716-4

Настоящее издание (1-е изд. — 2008 г.) посвящено теоретическим и практическим аспектам вычисления определенных интегралов, а также методам их оценок, свойствам и приложениям к решению различных геометрических и физических задач.

Часть 1 содержит разделы, посвященные определению, свойствам и методам вычисления собственных интегралов, свойствам несобственных интегралов. Часть 2 включает геометрические и физические приложения определенного интеграла, а также некоторые обобщения интеграла Римана — интегралы Лебега и Стилтьеса.

Изложение теоретического материала подкреплено большим количеством (более 220) разобранных примеров вычисления, оценок и исследования свойств определенных интегралов. В конце каждой главы приводятся задачи для самостоятельного решения (более 640, подавляющее большинство — с решениями). Цель пособия — помочь студенту во время прохождения темы «Определенный интеграл» на лекциях и практических занятиях. К пособию студент может обратиться для получения справочной информации по возникшему вопросу. Книга также может быть полезна преподавателям и всем желающим изучить данную тему достаточно подробно и широко.

Соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования.

Для студентов университетов, в том числе математических специальностей, изучающих интегральное исчисление в рамках курса математического анализа.

УДК 517.9(075.8)
ББК 22.161я73

ISBN 978-5-534-05714-0 (ч. 1)
ISBN 978-5-534-05716-4

Оглавление

Предисловие ко второму изданию

Данное пособие является первой книгой (из двух книг) учебного пособия по определенным интегралам, написанного авторами на основе многолетнего опыта чтения лекций и проведения семинаров по математическому анализу на младших курсах факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова. По сравнению с первым изданием пособие разбито на две части: в ч. 1 вошли первые четыре главы, в ч. 2 — остальные семь.

За время, прошедшее с момента выхода первого издания (2008 г.), старшеклассники, ориентированные в первую очередь на сдачу ЕГЭ с максимальными баллами, в большинстве своем стали испытывать нехватку общематематических знаний. Недостаток разнообразия решаемых в средней школе задач немедленно сказывается на общей подготовке школьников по математике (это не касается сильных физико-математических школ). В результате старшеклассники испытывают все бóльшие трудности в изучении основ математических дисциплин, и в частности начал математического анализа, что сказывается в целом на уровне подготовки приходящих на первый курс абитуриентов. Обращение к учебным пособиям, как классическим, так и созданным преподавателями вузов, где учится студент, дает возможность восполнить пробелы школьного образования, наверстать своих ушедших вперед сокурсников, которым посчастливилось учиться в хорошей математической школе, и глубже разобраться в данном предмете уже на новом уровне. Безусловно, студент первого курса должен для этого обладать навыком самостоятельной работы с учебной (специальной) литературой.

Данные книги успешно прошли апробацию временем и практикой на факультете ВМК МГУ, и мы надеемся, что новое переиздание пособия расширит круг читателей и поможет студентам вузов повысить уровень своих знаний при изучении определенных интегралов. Если кратко сформулировать цели данного издания, то в результате работы с представленными книгами студент сможет получить следующие компетенции:

знать

- основные понятия, связанные с определенным интегралом;
- свойства определенного интеграла;
- приемы и методы вычисления определенного интеграла для разных классов функций;

уметь

- формулировать необходимые определения и свойства;
- логически верно обосновывать свойства определенного интеграла;
- применять свойства определенного интеграла в решении задач;

владеть

- теоретическими навыками доказательства свойств определенных интегралов;
- прикладными навыками вычисления интегралов разных уровней сложности.

Предисловие к первому изданию

Раздел математического анализа, связанный с изучением определенного интеграла, его свойств и приложений, относится к наиболее важным разделам современной математики и традиционно включен в учебную программу основных курсов, изучаемых в высших учебных заведениях.

Существует большое количество учебных пособий и специальной литературы, посвященных в том числе и этой теме (см., например, список используемой литературы). И любой профессионал без труда назовет ряд изданий, которым он отдает предпочтение по глубине и (или) широте охвата изучаемого материала. Эта книга адресована в первую очередь именно студенту, впервые изучающему данный раздел.

Особенностью учебного процесса в университете является, как известно, то, что студенту для изучения заданной темы необходимо в весьма короткий срок, отведенный учебной программой, прослушать цикл лекций и посетить соответствующее количество семинарских (практических) занятий, посвященных этой теме. Удобно, если при этом под рукой имеется учебное пособие, куда можно заглянуть в случае, если что-то оказалось непонятым на лекции или же возникло затруднение при решении задачи на семинаре или при выполнении домашнего задания.

Конечно, преподаватель на семинарах объясняет новый материал, расставляет акценты, и под его руководством учащиеся разбирают решения типовых задач. Но, во-первых, время занятия ограничено, а информационная насыщенность может быть очень плотной, и просто невозможно успеть порой и сформулировать, и доказать все необходимые для решения задач свойства, и разобраться в нюансах и существующих подходах к решению той или иной задачи. Во-вторых (это касается в первую очередь студентов математических факультетов, более глубоко изучающих все разделы анализа), на семинаре часто не хватает времени даже для осмысливания уже разобранного решения, не говоря уже о том, чтобы иметь достаточно времени для самостоятельного его поиска. И, конечно, надо учитывать психофизические особенности памяти и умение «схватывать» и тут же применять новый материал, которые естественным образом различаются у разных студентов.

Целью авторов являлось написание книг-сопровождения, которые стали бы путеводителем студента в рамках темы «Определенный интеграл». Книги предназначены для активного использования их студентами *во время прохождения данной темы на лекциях и практических* *занятиях*. К ним может обратиться студент для получения справочной информации по возникшему вопросу. В эти книги он может заглянуть, если на лекции остался непонятым какой-либо вопрос или если возникли сложности при выполнении домашнего задания. Иногда даже хорошо успевающему и способному студенту необходимо подробно разобраться в решении того или иного типа задач, посмотреть, как следует оформлять решение, как правильно его обосновывать. Этим пособием рекомендуем пользоваться в процессе подготовки как к текущим проверочным и контрольным работам, так и при подготовке к предстоящим зачету и экзамену.

Отличительной особенностью данных книг является то, что они и содержат достаточно полный (включая все необходимые определения и доказательства утверждений по данной теме) теоретический материал, и служат практическим руководством для решения задач.

В книгах рассмотрены основные виды определенных интегралов от функций одной действительной переменной, изучаемые студентами на младших курсах.

В первую очередь это классический определенный интеграл Римана от ограниченной функции по ограниченному множеству. Сформулированы и доказаны все основные его свойства (гл. 1), включая оценки интегралов при помощи теорем о среднем и известных интегральных неравенств (гл. 2); рассмотрены методы вычисления интеграла Римана (гл. 3).

Одна из глав (гл. 4) посвящена обобщению понятия интеграла Римана — несобственным интегралам, когда неограниченными являются либо промежуток интегрирования, либо подынтегральная функция. Доказываются свойства несобственных интегралов, теоремы о среднем; исследуется сходимость интегралов (в том числе абсолютная или условная, в смысле главного значения) с привлечением теоремы сравнения и вытекающих из нее признаков сравнения, а также методы их вычисления. Приводятся с целью первичного ознакомления наиболее известные в классическом анализе несобственные интегралы.

Четыре главы освещают вопросы геометрических приложений собственных и несобственных интегралов: вычисление с помощью определенных интегралов площадей плоских фигур в декартовой и полярной системах координат при различных способах задания кривых, ограничивающих эти фигуры (гл. 5); вычисление длин дуг плоских и пространственных кривых (гл. 6); вычисление объемов тел, включая объемы тел вращения (гл. 7); вычисление площадей поверхностей тел вращения (гл. 8). Еще один параграф затрагивает физические приложения определенных интегралов на примерах некоторых известных физических задач (гл. 9).

Наконец, последние две главы посвящены интересным дальнейшим обобщениям понятия определенного интеграла на примерах интегралов Лебега (для измеримых ограниченных функций, которые могут быть сделаны непрерывными путем изменения их на множестве сколь угодно малой меры, т. е. измеримые функции в этом смысле близки к непрерывным функциям (гл. 10)) и Стилтьеса (для функций с ограниченным изменением (гл. 11)).

Каждая глава иллюстрирована серией разобранных примеров разнообразных типовых задач с подробными комментариями решений для лучшего усвоения процедуры поиска и обоснования решений. Завершается глава списком контрольных заданий и задач для самостоятельного решения (большинство из которых снабжены подробными решениями или указаниями к ним).

Книги не охватывают некоторые виды определенных интегралов, которые обычно изучаются позже, после ознакомления с теорией функций нескольких действительных переменных. Так, в нее не вошли кратные интегралы, криволинейные интегралы (в которых областью интегрирования служит плоская или пространственная кривая), поверхностные интегралы (т. е. интегралы от функций, заданных в точках некоторой поверхности), а также интегралы, зависящие от параметров. Не рассматриваются по аналогичной причине и интегралы от функций комплексных переменных.

Приносим глубокую благодарность академику В. А. Ильину, автору известных учебников по математическому анализу, за внимательное прочтение рукописи и положительный отзыв о ее содержании.

Выражаем также признательность и благодарность авторам используемых при написании данной книги пособий и трудов, всем рецензентам этих книг — за сделанные ценные замечания, а будущим читателям — за возможные замечания и советы по их улучшению.

Надеемся, что представленные книги окажутся полезными всем тем, кому они адресованы.

Глава 1
ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ РИМАНА

1.1. Историческая справка

Понятие интеграла и интегральное исчисление возникли из потребности вычислять площади любых фигур и поверхностей и объемы произвольных тел. Предыстория интегрального исчисления восходит к глубокой древности.

Великий греческий математик *Евдокс Книдский* (V—IV вв. до н. э.) сформулировал первое теоретическое обобщение и обоснование методов вычисления площадей и объемов, в которых неявно использовались предельные переходы. Метод Евдокса был назван в XVII в. методом исчерпывания. Им пользовались Евклид, Архимед и другие ученые древности. В длинной эволюции, которую на протяжении почти 2500 лет претерпело понятие предела, метод исчерпывания представляет собой первый этап. Евдокс доказал, что разность между площадью круга и площадью вписанного в него правильного многоугольника с числом сторон n может быть сделана меньше произвольного заданного $\varepsilon > 0$. С помощью своего метода Евдокс доказал, что объем пирамиды равен трети объема призмы с той же высотой и тем же основанием, а объем конуса равен трети объема соответствующего цилиндра.

Архимед в своих «Началах» с помощью метода исчерпывания доказывает, в частности, теорему о том, что объемы двух шаров относятся как кубы их радиусов. Сжимая круг радиусом a, Архимед получает эллипс с полуосями a и b и доказывает, что отношение площади эллипса к площади круга выражается отношением малой полуоси к большой и что площадь эллипса равна πab. Метод исчерпывания использовался в XVII—XVIII вв., а в некоторых учебных руководствах и в XIX и в начале XX в.

Ученик Галилея, итальянский математик *Бонавентура Кавальери* (1598—1647) считается основоположником метода неделимых — предшественника метода бесконечно малых. В XVII—XVIII вв. многие из последователей Кавальери, в том числе английский математик *Джон Валлис* (1616—1703) уже явно отождествляют неделимые величины с актуально бесконечно малыми. Именно Валлис, как считают, первым в арифметической форме изложил предельный переход, дав мощный стимул в развитие теории пределов. Он же предложил в 1665 г. использовать символ ∞ для обозначения бесконечности. Метод неделимых использовали *Евангелиста Торричелли* (1608—1647), *Блез Паскаль* (1623—1662) и другие ученые того времени. Создание этого метода стало одним из важных этапов в развитии интегрального исчисления. Дальнейшее развитие метод пределов получил в трудах *Исаака Ньютона* (1643—1727).

Понятия производной, дифференциала и интеграла, как и весь математический анализ, ныне основываются на разработанном в XIX в. методе пределов, или, что в сущности все равно, на методе бесконечно малых. В конце XVII в. в Европе образовались две крупные математические школы, которые существовали на протяжении почти всего XVIII в. Главой одной из них был крупный немецкий ученый *Готтфрид Вильгельм фон Лейбниц* (1646—1716). Как он сам, так и его ученики и сотрудники — *Гильом Франсуа Лопиталь* (1661—1704), братья *Якоб* (1654—1705) и *Иоганн* (1667—1748) *Бернулли*, а также его непосредственные последователи, в том числе *Леонард Эйлер* (1707—1783), жили и творили в основном на континенте. Вторая школа, предшественниками которой были Валлис и Барроу, возглавляемая Ньютоном, состояла из английских и шотландских ученых. В их числе был и *Колин Маклорен* (1698—1746). Обе школы привели к созданию дифференциального и интегрального исчислений. В своих трудах Л. Эйлер излагает многочисленные приемы вычисления не только неопределенных, но и определенных интегралов, применяя и развивая новые методы, как, например, интегрирование по параметру, использование разных подстановок (подстановки Эйлера) и др. Он вычислил много труднейших определенных интегралов, например

$$\int_0^1 \frac{(x-1)\,dx}{\ln x} = \ln 2,$$

важных несобственных интегралов, например

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

и открыл ряд новых важнейших интегралов (например, бета-функцию $\int_0^1 x^m (1-x)^n \,dx$ и гамма-функцию $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx$).

В 1777—1778 гг. Эйлер впервые применил к вычислению определенных интегралов функции комплексной переменной. Свой вклад в развитие интегрального и дифференциального исчислений внесли также *Жозеф Луи Лагранж* (1736—1813) и французский ученый и просветитель *Жан Даламбер* (1717—1783). В середине XVIII в. Л. Эйлер и Ж. Лагранж свободно владели двойными и тройными интегралами. Криволинейные интегралы были рассмотрены в 1743 г. в трудах *Алекси Клеро* (1713—1765).

В начале XIX в. интегральное исчисление, как и дифференциальное исчисление, было перестроено на новых основаниях. Реформа интегрального исчисления была начата крупным французским математиком *Огюстеном Луи Коши* (1789—1857). Определенный интеграл, рассматриваемый как предел интегральной суммы, О. Коши выдвинул как одно из важнейших понятий анализа. При этом он воспользовался символом $\int_a^b f(x)dx$, предложенным *Джозефом Фурье* (1768—1830). Именно благодаря Коши этот символ вошел в общее употребление и сохранился поныне. Термин «определенный интеграл» предложил в 1779 г. *Пьер Симон Лаплас* (1749—1827). Коши впервые аналитически доказал существование определенного интеграла у непрерывной функции, а также точно определил простейшие несобственные интегралы для неограниченного промежутка интегрирования и для функций с конечным числом точек разрыва.

Дальнейшие обобщения понятия интеграла, связанные особенно с изучением тригонометрических рядов, были даны *Бернардом Риманом* (1826—1866), *Анри Лебегом* (1875—1941) и другими. Б. Риман первый определил необходимые и достаточные условия интегрируемости ограниченной функции. Ему принадлежит общее определение определенного интеграла, поэтому интегральную сумму и стали называть «римановой», хотя по существу это понятие восходит еще к Архимеду, а в современной форме для случая непрерывной функции им пользовался Коши. А. Лебегу принадлежит обобщение понятия интеграла (интеграл Лебега), основанное на теории меры (мера Лебега) и позволяющее интегрировать чрезвычайно широкий класс функций.

В развитии интегрального исчисления в XIX в. приняли важнейшее участие и русские ученые. Так, *М. В. Остроградский* (1801—1862) предложил оригинальный прием интегрирования рациональных дробей (метод Остроградского), позволяющий алгебраически выделить рациональную часть интеграла (1845). Ему же принадлежат имеющие фундаментальное значение в интегральном исчислении и его приложениях формулы преобразования n-кратных интегралов в $(n-1)$-кратные. Большое число специальных определенных интегралов вычислил *Н. И. Лобачевский* (1792—1856). Математик *В. Я. Буняковский* (1804—1889) открыл широко применяемое неравенство

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx,$$

носящее его имя. Крупнейшие исследования по интегральному исчислению принадлежат П. Л. Чебышёву. Среди них — продолжавшие исследования Н. Абеля и М. В. Остроградского работы об интегрировании в конечном виде некоторых иррациональных функций. В частности, П. Л. Чебышёв доказал, что известные еще в XVIII в. три случая интегрируемости в конечном виде биномиального дифференциала являются единственными.

Общая теория интеграла связана с развитием теории множеств и теории функций действительной переменной.

1.2. Определение интеграла Римана

1.2.1. Интегральные суммы и интеграл Римана

Пусть дан отрезок $[a,b]$ $(a<b)$. Конечное числовое множество $T=\{x_0;x_1;\ldots;x_n\}$ назовем (*неразмеченным*) *разбиением* отрезка $[a,b]$ если $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ $(n\in\mathbb{N})$.

Разбиение T' называется *измельчением* разбиения T, если $T\subset T'$ (т. е. T' содержит все те же точки, что и T, и, возможно, еще какие-то).

Разбиение T называется *объединением* разбиений T_1 и T_2, если $T=T_1\cup T_2$.

Замечание. Если $T=T_1\cup T_2$, то T — измельчение T_1 и T — измельчение T_2.

Зафиксируем некоторое разбиение $T=\{x_0;x_1;\ldots;x_n\}$. Обозначим длину k-го отрезка разбиения $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, $k=1,2,\ldots,n$. Величина $\Delta_T=\max\limits_{1\le k\le n}\Delta x_k$ называется *диаметром* разбиения T.

Выберем на каждом из отрезков $[x_{k-1},x_k]$ точку ξ_k: $x_{k-1}\le\xi_k\le x_k$. Совокупность точек $V=\{x_0;x_1;\ldots;x_n;\xi_1;\ldots;\xi_n\}$ назовем *размеченным разбиением* отрезка $[a,b]$. Неразмеченное разбиение T, соответствующее разбиению V, будем обозначать $T(V)$.

Пусть функция f определена на отрезке $[a,b]$. Сумма

$$\sigma(V)=\sigma(T,\xi)=f(\xi_1)\Delta x_1+\ldots+f(\xi_n)\Delta x_n=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$$

называется *интегральной суммой* (*Римана*) функции f, соответствующей размеченному разбиению V.

Действительное число I называется *определенным интегралом Римана* от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, если это число является пределом интегральных сумм при стремлении диаметра разбиения к нулю (причем значение предела не зависит от выбора размеченного разбиения), т. е. если для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, такое что для произвольного размеченного разбиения V отрезка $[a,b]$ с диаметром $\Delta_V<\delta$ выполнено

$$|I-\sigma(V)|<\varepsilon\ \left(\left|I-\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k\right|<\varepsilon\right).$$

Обозначение: $I=\int\limits_a^b f(x)dx$. При этом $f(x)dx$ называется *подынтегральным выражением*, $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, x — *пере-*

менной интегрирования, $[a,b]$ — *отрезком* (*промежутком*) *интегрирования*. Число a называется *нижним*, а b — *верхним пределами интегрирования*.

Если функция f определена в точке a, то по определению будем полагать

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Если $a < b$ и f интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$, то по определению

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Функция f, для которой существует определенный интеграл Римана, называется *интегрируемой* (*по Риману*, или *в собственном смысле*) на отрезке $[a,b]$. Обозначение: $f \in R[a,b]$.

Докажем корректность приведенного определения.

Теорема 1.1 (единственность интеграла Римана). *Если существуют два числа I_1, I_2, удовлетворяющие данному выше определению интеграла, то $I_1 = I_2$.*

Доказательство (от противного). Пусть $I_1 \neq I_2$. Предположим, ради определенности, что $I_1 < I_2$, и обозначим $\varepsilon = \dfrac{I_2 - I_1}{2} > 0$. Тогда, по определению, существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое что для любого размеченного разбиения V отрезка $[a,b]$, удовлетворяющего условию $\Delta_V < \delta$, выполняется $|I_1 - \sigma(V)| < \varepsilon$, $|I_2 - \sigma(V)| < \varepsilon$. Значит,

$$I_2 - I_1 = |I_2 - I_1| \leq |I_2 - \sigma(V)| + |I_1 - \sigma(V)| < 2\varepsilon.$$

Полученное противоречие доказывает утверждение.

Теорема 1.2 (необходимое условие интегрируемости). *Пусть функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$. Тогда f ограничена на $[a,b]$.*

Доказательство (от противного). Предположим, что функция f не ограничена на отрезке $[a,b]$. Зафиксируем $\delta > 0$ и рассмотрим разбиение $T = \{x_0; x_1; \ldots; x_n\}$ с диаметром $\Delta_T < \delta$. По условию, найдется отрезок разбиения $[x_{r-1}, x_r]$, на котором f не ограничена. Пусть $M > 0$ — произвольное (сколь угодно большое) число, $\xi_1, \ldots, \xi_{r-1}, \xi_{r+1}, \ldots, \xi_n$ — любые числа, удовлетворяющие условиям $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Обозначим

$$A = \left| \sum_{k=1, k\neq r}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \right|.$$

Так как f не ограничена на отрезке $[x_{r-1}, x_r]$, то существует точка $\xi_r \in [x_{r-1}, x_r]$, такая что $|f(\xi_r)| > \dfrac{M + A}{\Delta x_r}$. Тогда получим, что для любого

$M > 0$ и для любого $\delta > 0$ существует $V = \{x_0; x_1; ...; x_n; \xi_1; ...; \xi_n\}$ — размеченное разбиение отрезка $[a, b]$, $\Delta_V < \delta$, такое что

$$|\sigma(V)| \geq \left| |f(\xi_r)\Delta x_r| - \left| \sum_{k=1, k\neq r}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \right| \right| > \frac{M + A}{\Delta x_r}\Delta x_r - A = M.$$

Это означает, что множество интегральных сумм $\sigma(V)$, удовлетворяющих условию $\Delta_V < \delta$, не ограничено при любом $\delta > 0$. Получили противоречие с существованием интеграла Римана. Теорема доказана.

Следствие. Неограниченная на отрезке $[a, b]$ функция не интегрируема по Риману на этом отрезке.

1.2.2. Вычисление определенных интегралов по определению, т. е. переходом к пределу интегральных сумм

Подчеркнем, что этот способ активно применялся как основной способ вычисления интегралов в то время, когда еще не была известна формула Ньютона — Лейбница. В настояшее время данный способ практически не используется, сохранив тем не менее свое важное теоретическое значение.

Для того чтобы воспользоваться им, необходимо предварительно убедиться в интегрируемости функции f на заданном отрезке $[a, b]$. Тогда для вычисления интеграла достаточно будет рассмотреть лишь одно из бесконечного числа возможных разбиений. Затем производится некоторое «удобное» для данной функции на данном отрезке разбиение его на n частей

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b.$$

Отметим, что, вообще говоря, не всегда наиболее подходящим бывает разбить отрезок $[a, b]$ на равные части. Общих рекомендаций для выбора разбиения не существует. В каждом конкретном случае следует учитывать специфику подынтегральной функции, ее поведение на промежутке интегрирования.

Далее осуществляется выбор промежуточных точек ξ_k на каждом элементарном отрезке разбиения $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, ..., n$, в качестве которых часто берут левые или правые концы этих отрезков, их середины и т. п. Точки x_k и ξ_k следует выбирать из расчета, чтобы полученная в результате интегральная сумма была наиболее простой с точки зрения последующего вычисления от нее предела. Далее составляется интегральная сумма вида

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

и, наконец, вычисляется ее предел (условие $\Delta_V \to 0$ при этом заменяется на $n \to +\infty$):

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Полученное в результате число и есть искомое значение определенного интеграла.

1.2.3. Геометрический смысл определенного интеграла

Рассмотрим задачу о вычислении площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху дугой AB графика непрерывной неотрицательной функции $y = f(x)$, снизу — отрезком $[a, b]$ оси Ox, слева и справа — отрезками вертикальных прямых $x = a$ и $x = b$ соответственно.

Произведем разбиение этого отрезка произвольными точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

на n частичных отрезков, выберем на каждом таком отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, произвольную точку ξ_k (рис. 1.1) и составим интегральную сумму

$$\sigma(T, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k .$$

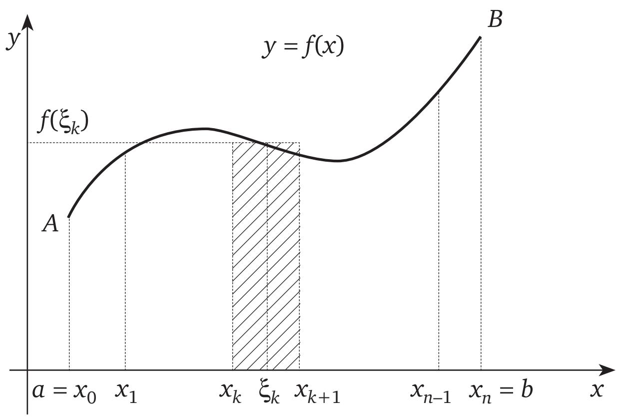

Рис. 1.1

Геометрический смысл произведения $f(\xi_k)\Delta x_k$ есть площадь элементарного прямоугольника с основанием Δx_k и высотой $f(\xi_k)$. Поэтому геометрический смысл интегральной суммы — это сумма площадей всех таких прямоугольников.

Если теперь устремить диаметр разбиения к нулю, то число точек деления будет неограниченно увеличиваться, и в силу интегрируемости непрерывной функции на отрезке $[a, b]$ в пределе получим площадь указанной выше криволинейной трапеции, т. е. *численно* искомая площадь трапеции S равна определенному интегралу:

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

1.2.4. Суммы и интегралы Дарбу

Наряду с римановыми существуют и другие виды интегральных сумм.

Пусть функция f определена и ограничена на отрезке $[a,b]$. Обозначим

$$M = \sup_{a \le x \le b} f(x), m = \inf_{a \le x \le b} f(x),$$

$$M_k = \sup_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x), m_k = \inf_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x),$$

где $T = \{x_0; x_1; ...; x_n\}$ — некоторое разбиение отрезка $[a,b]$.

Верхней (*нижней*) *суммой Дарбу*[1] функции f на отрезке $[a,b]$, отвечающей разбиению $T = \{x_0; x_1; ...; x_n\}$, называется сумма

$$S(T) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k \ \left(s(T) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k\right).$$

Число $I^* = \inf_T \{S(T)\}$ $(I_* = \sup_T \{s(T)\})$ называют *верхним* (*нижним*) *интегралом Дарбу* от функции f на отрезке $[a,b]$ (здесь точная верхняя и нижняя грани берутся по всем возможным разбиениям T отрезка $[a,b]$).

Докажем некоторые свойства сумм и интегралов Дарбу.

Лемма 1.1. Для любого размеченного разбиения V отрезка $[a,b]$ имеет место неравенство

$$s(T(V)) \le \sigma(V) \le S(T(V)).$$

Доказательство. Поскольку для любого $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1,2,...,n$, справедливо неравенство $m_k \le f(\xi_k) \le M_k$, то, умножив его на Δx_k и просуммировав затем по всем k, получим

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k m_k \le \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k f(\xi_k) \le \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k M_k.$$

Лемма 1.1 доказана.

Лемма 1.2. Для любого разбиения T отрезка $[a,b]$ справедливо

$$S(T) = \sup_{V(T)} \{\sigma(V)\}, s(T) = \inf_{V(T)} \{\sigma(V)\},$$

где точная нижняя и верхняя грани берутся по всем возможным размеченным разбиениям V, отвечающим разбиению T.

Доказательство. Пусть $T = \{x_0; x_1; ...; x_n\}$ — произвольное разбиение отрезка $[a,b]$. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Так как $M_k = \sup_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)$, то найдется точка $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, такая что $f(\xi_k) > M_k - \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Тогда

---

[1] *Гастон Дарбу* (1842—1917) — французский математик.

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k > \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k - \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = S(T) - \varepsilon,$$

поскольку сумма длин всех частичных отрезков разбиения равна длине исходного отрезка. Значит, для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется V — размеченное разбиение отрезка $[a,b]$, для которого $\sigma(V) > S(T) - \varepsilon$. Однако из леммы 1.1 следует, что $\sigma(V) \le S(T)$ для любого размеченного разбиения V. Следовательно, $S(T) = \sup\limits_{V}\{\sigma(V)\}$.

Второе утверждение леммы доказывается аналогично. Лемма 1.2 доказана.

Лемма 1.3. Пусть $T = \{x_0; x_1; ...; x_n\}$ — разбиение отрезка $[a,b]$, $T' = \{x_0; x_1; ...; x_n; x_1'; ...; x_l'\}$ — измельчение разбиения T. Тогда

$$S(T') \le S(T),\ s(T') \ge s(T),$$

причем $S(T) - S(T') \le l(M-m)\Delta_T$, $s(T') - s(T) \le l(M-m)\Delta_T$.

Доказательство. Пусть $T' = \{x_0; x_1; ...; x_n; x'\}$, где $x' \in [x_{k-1}, x_k]$. Тогда k-е слагаемое в сумме для $S(T)$ имеет вид $M_k \Delta x_k = (x_k - x_{k-1}) \cdot \sup\limits_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)$, а соответствующее слагаемое в сумме для $S(T')$ — $(x' - x_{k-1}) \sup\limits_{x_{k-1} \le x \le x'} f(x)$ + $(x_k - x') \sup\limits_{x' \le x \le x_k} f(x)$; все остальные слагаемые в этих суммах совпадают. Так как $\sup\limits_{x_{k-1} \le x \le x'} f(x) \le M_k$, $\sup\limits_{x' \le x \le x_k} f(x) \le M_k$, то $S(T') \le S(T)$. С другой стороны,

$$S(T) - S(T') \le M_k \Delta x_k - [(x' - x_{k-1}) \sup_{x_{k-1} \le x \le x'} f(x) +$$
$$+ (x_k - x') \sup_{x' \le x \le x_k} f(x)] \le (M-m)\Delta x_k \le (M-m)\Delta_T,$$

поскольку $M_k \le M$, $\sup\limits_{x_{k-1} \le x \le x'} f(x) \ge m$, $\sup\limits_{x' \le x \le x_k} f(x) \ge m$. Значит, при добавлении одной точки верхняя сумма Дарбу уменьшится не более чем на $(M-m)\Delta_T$. Тогда при добавлении l точек она уменьшится не более чем на $l(M-m)\Delta_T$ (так как диаметр разбиения при измельчении может только уменьшиться).

Утверждение для нижней суммы Дарбу доказывается аналогично.

Лемма 1.3 доказана.

Лемма 1.4. Пусть T_1, T_2 — произвольные разбиения отрезка $[a,b]$. Тогда

$$s(T_1) \le S(T_2).$$

Доказательство. Обозначим $T_3 = T_1 \cup T_2$. Тогда T_3 — измельчение и для T_1, и для T_2. Значит, $s(T_1) \le s(T_3) \le S(T_3) \le S(T_2)$ (последняя цепочка неравенств вытекает из предыдущей леммы и из леммы 1.1).

Лемма 1.4 доказана.

Лемма 1.5. Если функция f ограничена на отрезке $[a,b]$, то для нее существуют верхний I^* и нижний I_* интегралы Дарбу, причем для любого разбиения T отрезка $[a,b]$ выполнено

$$s(T) \leq I_* \leq I^* \leq S(T).$$

Доказательство. Докажем существование интегралов Дарбу. По условию, $\exists M\colon |f(x)| \leq M \ \forall x \in [a,b]$. Для любого разбиения T отрезка $[a,b]$ имеем

$$s(T) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \leq M \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = M(b-a).$$

Множество нижних сумм Дарбу ограничено сверху, а следовательно, у него существует точная верхняя грань. Аналогично доказывается существование точной нижней грани у множества верхних сумм Дарбу.

Перейдем к доказательству неравенств. Так как $I^* = \inf\limits_{T}\{S(T)\}$, то $I^* \leq S(T)$. Аналогично $s(T) \leq I_*$. Покажем, что $s(T) \leq I_* \leq I^* \leq S(T)$. Предположим, что это не так. Обозначим $\varepsilon = \dfrac{I_* - I^*}{2} > 0$. Тогда существует T_1 — разбиение отрезка $[a,b]$, для которого

$$S(T_1) < I^* + \varepsilon = \frac{I^* + I_*}{2},$$

и существует T_2 — разбиение отрезка $[a,b]$, для которого

$$s(T_2) > I_* - \varepsilon = \frac{I^* + I_*}{2}.$$

Отсюда $s(T_2) > S(T_1)$, что противоречит лемме 1.4. Значит, сделанное предположение неверно и $s(T) \leq I_* \leq I^* \leq S(T)$. Лемма 1.5 доказана.

Лемма 1.6. Нижний (верхний) интегралы Дарбу являются пределами соответственно нижней (верхней) интегральных сумм при стремлении диаметра разбиения к нулю:

$$I_* = \lim_{\Delta_T \to 0} s(T) \ \left(I^* = \lim_{\Delta_T \to 0} S(T)\right),$$

т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое что для любого T — разбиения отрезка $[a,b]$, $\Delta_T < \delta$, выполнено

$$|s(T) - I_*| < \varepsilon \ \left(|S(T) - I^*| < \varepsilon\right).$$

Доказательство. Докажем, что $I^* = \lim\limits_{\Delta_T \to 0} S(T)$.

Пусть $M = \sup\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$, $m = \inf\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$.

Если $M = m$, то $f(x) = M = m$ для любого $x \in [a,b]$. Тогда для произвольного разбиения T имеет место равенство $S(T) = M(b-a) = I^*$, и утверждение леммы выполнено.

Пусть теперь $M > m$. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Так как $I^* = \inf\limits_T \{S(T)\}$, то существует разбиение $T^* = \{x_0^*; x_1^*; \ldots; x_k^*\}$, такое что $S(T^*) < I^* + \frac{\varepsilon}{2}$. Обозначим

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2(M-m)(k-1)}$$

(заметим, что выбор числа δ зависит только от ε, поскольку k — число точек разбиения T^*, а оно выбирается в зависимости от ε).

Пусть $T = \{x_0; x_1; \ldots; x_n\}$ — произвольное разбиение отрезка $[a,b]$ с диаметром $\Delta_T < \delta$. Тогда $T' = \{x_0; x_1; \ldots; x_n; x_1^*; \ldots; x_{k-1}^*\}$ — измельчение T (добавили к T точки разбиения T^*). Из леммы 1.3 вытекает следующая цепочка неравенств:

$$0 \le S(T) - S(T') \le (k-1)(M-m)\Delta_T < (k-1)(M-m)\delta = \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (1.1)$$

Так как разбиение T' является измельчением и для разбиения T^*, то по лемме 1.5 получаем $I^* \le S(T') \le S(T^*)$. Тогда, по построению разбиения T^*, имеем

$$0 \le S(T') - I^* \le S(T^*) - I^* < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (1.2)$$

Сложив неравенства (1.1) и (1.2), получим, что

$$0 \le S(T) - S(T') + S(T') - I^* < \varepsilon.$$

Таким образом, доказали, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое что для любого разбиения T отрезка $[a,b]$, удовлетворяющего условию $\Delta_T < \delta$, выполнено $0 \le S(T) - I^* < \varepsilon$. Это означает, по определению, что $I^* = \lim\limits_{\Delta_T \to 0} S(T)$.

Утверждение для нижнего интеграла Дарбу доказывается аналогично.

Лемма 1.6 доказана.

1.2.5. Необходимое и достаточное условие интегрируемости

Сформулируем и докажем один из основных критериев интегрируемости по Риману функции, ограниченной на отрезке.

Теорема 1.3 (критерий Римана интегрируемости функции на отрезке). *Пусть функция f ограничена на отрезке $[a,b]$. Тогда она интегрируема на отрезке $[a,b]$ тогда и только тогда, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется разбиение T отрезка $[a,b]$, такое что $S(T) - s(T) < \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть функция f ограничена на отрезке $[a,b]$.

1. *Необходимость*. Пусть f интегрируема на отрезке $[a,b]$. Тогда, по определению интеграла, для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое что для любого размеченного разбиения V отрезка $[a,b]$, $\Delta_V < \delta$, выполнено $|I - \sigma(V)| < \frac{\varepsilon}{3}$ (здесь $I = \int_a^b f(x)dx$). Последнее неравенство перепишем в виде

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma(V) < I + \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.3}$$

Пусть неразмеченное разбиение T соответствует разбиению V, тогда $\Delta_T < \delta$. Так как $s(T) = \inf_V \{\sigma(V)\}$, $S(T) = \sup_V \{\sigma(V)\}$ (см. лемму 1.2), то из неравенства (1.3) следует, что

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \le s(T) \le I + \frac{\varepsilon}{3}, I - \frac{\varepsilon}{3} \le S(T) \le I + \frac{\varepsilon}{3}$$

(если все элементы множества лежат на некотором отрезке, то точные грани этого множества также принадлежат рассматриваемому отрезку). Отсюда получаем, что

$$|S(T) - s(T)| \le \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Необходимость доказана.

2. *Достаточность*. Пусть для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется разбиение T отрезка $[a,b]$, такое что $|S(T) - s(T)| < \varepsilon$. Так как $s(T) \le I_* \le I^* \le S(T)$ (лемма 1.5), то $I^* - I_* < \varepsilon$. Поскольку ε — произвольное число, а значения верхнего и нижнего интегралов Дарбу от него не зависят, то последнее неравенство означает, что $I^* = I_*$. Обозначим $I = I^* = I_*$.

Поскольку $I_* = \lim_{\Delta_T \to 0} s(T)$, $I^* = \lim_{\Delta_T \to 0} S(T)$ (лемма 1.6), то получаем, что $\lim_{\Delta_T \to 0} (S(T) - s(T)) = 0$. Это означает по определению предела, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое что для любого разбиения T отрезка $[a,b]$, $\Delta_T < \delta$, выполнено $S(T) - s(T) < \varepsilon$. Значит, для любого размеченного разбиения V отрезка $[a,b]$, $\Delta_V < \delta$, выполнено

$$S(T(V)) - s(T(V)) < \varepsilon. \tag{1.4}$$

Поскольку $s(T(V)) \le \sigma(V) \le S(T(V))$ (лемма 1.1) и $s(T(V)) \le I \le S(T(V))$ (лемма 1.5), то из неравенства (1.4) получим, что $|I - \sigma(V)| < \varepsilon$ для любого размеченного разбиения V отрезка $[a,b]$, $\Delta_V < \delta$. Мы доказали, что $I = \lim_{\Delta_V \to 0} \sigma(V)$. Это означает, что функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$ и $I = \int_a^b f(x)dx$. Теорема полностью доказана.

1.3. Основные классы интегрируемых функций

1.3.1. Функции, непрерывные на отрезке

Одним из основных классов функций, интегрируемых по Риману на отрезке, является класс непрерывных на этом отрезке функций.

Теорема 1.4. *Пусть функция f непрерывна на отрезке* $[a,b]$. *Тогда f интегрируема на* $[a,b]$.

Доказательство. Пусть f непрерывна на отрезке $[a,b]$, тогда она равномерно непрерывна на этом отрезке (теорема Кантора). Пусть $\varepsilon>0$ — произвольное число. Тогда найдется число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, такое что для любых точек ξ',ξ'' из отрезка $[a,b]$, $|\xi'-\xi''|<\delta$, выполнено

$$\left|f(\xi')-f(\xi'')\right|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Пусть $T=\{x_0;x_1;...;x_n\}$ — произвольное разбиение отрезка $[a,b]$, удовлетворяющее условию $\Delta_T<\delta$. Тогда для любого натурального числа k, $1\le k\le n$, справедливы неравенства $|M_k-m_k|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$ (так как функция f непрерывна на любом отрезке разбиения $[x_{k-1},x_k]$, то она достигает на нем своих точных граней, значит, существуют точки $\xi_k',\xi_k''\in[x_{k-1},x_k]$, для которых $f(\xi_k')=M_k$, $f(\xi_k'')=m_k$). Отсюда следует, что для разности верхней и нижней сумм Дарбу функции f, соответствующих разбиению T, справедлива оценка

$$S(T)-s(T)=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=\varepsilon.$$

Согласно критерию Римана интегрируемости функции на отрезке это означает, что функция f интегрируема на $[a,b]$. Теорема доказана.

1.3.2. Ограниченные на отрезке функции, множество точек разрыва которых имеет меру нуль по Жордану

Говорят, что интервал (x',x'') *покрывает* точку x, если $x\in(x',x'')$.

Числовое множество X называется *множеством меры нуль по Жордану*, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует конечная система интервалов, покрывающих все точки множества X, причем сумма длин этих интервалов меньше ε.

Теорема 1.5. *Пусть функция f определена и ограничена на отрезке* $[a,b]$. *Если множество точек разрыва f на* $[a,b]$ *имеет меру нуль по Жордану, то функция f интегрируема на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть $M=\sup\limits_{a\le x\le b}f(x)$, $m=\inf\limits_{a\le x\le b}f(x)$. Если $M=m$, то $f(x)=M=m$ для любой точки $x\in[a,b]$, и функция f интегрируема на $[a,b]$ (теорема 1.4).

Пусть $M>m$. Выберем произвольное число $\varepsilon>0$. Пусть (x_1',x_1''), ..., (x_l',x_l'') — интервалы, покрывающие все точки разрыва функции f