И. Ю. Седых, Ю. Б. Гребенщиков, А. Ю. Шевелев

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ГУМАНИТАРНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

УЧЕБНИК И ПРАКТИКУМ
ДЛЯ АКАДЕМИЧЕСКОГО БАКАЛАВРИАТА

Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по гуманитарным направлениям и специальностям

Книга доступна в электронной библиотечной системе
biblio-online.ru

Москва ▪ Юрайт ▪ 2019

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
С28

***Авторы*:**

Седых Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент, заместитель по учебно-методической работе заведующего кафедрой математики-2 Департамента математики и информатики Финансового университета при Правительстве РФ (г. Москва) — разделы II, IV;

Гребенщиков Юрий Борисович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики-2 Департамента математики и информатики Финансового университета при Правительстве РФ (г. Москва) — раздел I;

Шевелев Александр Юрьевич — кандидат физико-математических наук, доцент, заместитель по научной работе заведующего кафедрой математики-2 Департамента математики и информатики Финансового университета при Правительстве РФ (г. Москва) — раздел III.

***Рецензенты*:**

Чечкин А. В. — профессор, доктор физико-математических наук, профессор Финансового университета при Правительстве РФ;

Звягин А. В. — профессор, доктор физико-математических наук, профессор Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Седых, И. Ю.

С28 Высшая математика для гуманитарных направлений : учебник и практикум для академического бакалавриата / И. Ю. Седых, Ю. Б. Гребенщиков, А. Ю. Шевелев. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 443 с. — Серия : Бакалавр. Академический курс.

ISBN 978-5-534-04161-3

Учебник охватывает основные разделы высшей математики, которые изучаются студентами, специализирующимися в области гуманитарных наук. Кроме систематизированного элементарного изложения теоретического материала по каждой теме приведено большое число примеров разного уровня сложности и задач для самостоятельного решения.

Учебник написан на основе курсов лекций, читаемых авторами на различных факультетах Финансового университета при Правительстве Российской Федерации для студентов соответствующих направлений подготовки. Учебник соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования и содержит материалы, необходимые как для преподавателей, так и для студентов, участвующих в образовательном процессе по данной дисциплине.

Для студентов в рамках основной образовательной программы подготовки бакалавров, обучающихся по направлениям подготовки «Социология», профиль «Экономическая социология»; «Политология», профили «Политология экономических процессов», «Связи с общественностью в политике и бизнесе»; «Туризм», профиль «Международный туризм»; «Государственное и муниципальное управление» и другим гуманитарным направлениям и специальностям.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-5-534-04161-3

Оглавление

Предисловие

Данный учебник разработан для учебного и методического обеспечения организации и проведения учебного процесса по направлениям подготовки «Государственное и муниципальное управление», «Политология», «Социология», «Туризм» по программе подготовки бакалавра в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования (ФГОС ВО).

Дисциплина «Математика» под тем или иным названием («Высшая математика» и т.п.) входит в базовую часть основной образовательной программы подготовки бакалавров (математический и естественнонаучный цикл).

Преподавание дисциплины «Математика» студентам, обучающимся по вышеперечисленным направлениям, имеет ряд особенностей, на которые стоит обратить внимание. Прежде всего это широта круга охватываемых вопросов в течение ограниченного промежутка времени. Ситуация осложняется еще и тем, что дисциплина преподается в первом семестре первого курса, т.е. студентам — вчерашним школьникам.

Все это требует от преподавателя больших усилий по организации и проведению учебного процесса. И надо помнить, что цель изучения дисциплины «Математика» (как и других дисциплин математического цикла) — научить студентов учиться, т.е. находить, воспринимать и использовать в своей будущей профессиональной деятельности необходимую информацию. А источников этой информации в современной ситуации достаточно много (как традиционных, так и новейших и инновационных).

Учебник содержит материалы, необходимые как для преподавателей, так и для студентов. Он включает в себя четыре раздела: «Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии», «Основы дискретной математики», «Математический анализ», «Теория вероятностей, математическая статистика, случайные процессы». Каждый раздел начинается с перечисления компетенций (знаний, умений и навыков), которые должны приобрести обучаемые в результате его изучения. Затем излагается теоретический материал, снабженный большим количеством решенных примеров разного уровня сложности. Авторы сознательно постарались минимизировать (без ущерба для логики изложения) число доказательств утверждений, приводимых в пособии. Кроме того, авторы учли важное значение самостоятельного изучения учебного материала, поэтому после теоретической части приведены контрольные вопросы, позволяющие студентам в порядке самоконтроля оценить уровень усвоения теоретического материала. Потом предлагается некоторое «руководство к решению задач» — практикум, включающий разнообразные разобранные задачи, названные упражнениями (для отличия от примеров, разобранных по тексту главы). В конце каждой главы находятся задачи для самостоятельного решения, ответы к которым приведены в конце пособия.

В основе издания лежат курсы лекций, читаемых авторами по дисциплинам математического цикла по соответствующим направлениям подготовки в Финансовом университете при Правительстве Российской Федерации. Раздел «Элементы аналитической алгебры и аналитической геометрии» разработан Ю. Б. Гребенщиковым, разделы «Основы дискретной математики» и «Теория вероятностей, математическая статистика, случайные процессы» написаны И. Ю. Седых, раздел «Математический анализ» — А. Ю. Шевелевым.

Пособие предназначено в первую очередь для студентов, обучающихся по программам академического бакалавриата, но может быть использовано и для программ прикладного бакалавриата, при обучении слушателей бизнес-школ, колледжей, также для программ повышения квалификации. Данное пособие поможет всем желающим приобрести основы математических знаний.

В совокупности с дисциплинами базовой части математического и естественнонаучного цикла дисциплин ФГОС ВО освоение данного курса способствует формированию следующих компетенций:

- владение культурой мышления, способность к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения;
- знание основных положений, законов и методов естественных наук и математики, умение на их основе представить адекватную современному уровню знаний научную картину мира;
- способность выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь для их решения соответствующий физико-математический аппарат;
- способность использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования;
- способность использовать методы сбора, обработки и интерпретации комплексной социальной информации для решения организационно-управленческих задач, в том числе находящиеся за пределами непосредственной сферы деятельности.

После освоения курса студент должен:

знать

- основы математики, необходимые для решения задач в профессиональной области;
- определения, теоремы, подходы к решению задач из основных разделов высшей математики; теории вероятностей и математической статистики;

уметь

- применять методы математического анализа и моделирования социальных процессов;
- применять математические методы для решения профессиональных задач;

владеть

- навыками научного анализа социальных проблем и процессов;
- навыками практического использования базовых знаний и методов математики и естественных наук;
- навыками применения современного математического инструментария для решения профессиональных задач;
- методикой построения, анализа и применения математических моделей для оценки состояния и прогноза развития экономических явлений и процессов.

Раздел I
ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Линейная алгебра — это часть алгебры, которая изучает в том числе такие математические объекты, как векторы, линейные пространства, матрицы, системы линейных уравнений. Методы и понятия линейной алгебры входят в число фундаментальных инструментов количественного анализа практически в любой сфере человеческой деятельности.

Теоретическое исследование любого процесса или объекта начинается с построения и изучения упрощенных моделей, которые описываются линейными зависимостями величин, линейными уравнениями, связывающими эти величины, лишь иногда выходя за рамки линейных соотношений. На последующих стадиях анализа исследователь получает все более сложную и подробную картину изучаемой системы, и для наглядной интерпретации полученных результатов ему часто приходится опять же упрощать какие-то детали процесса, сводя его описание к линейным (и простым нелинейным) формулам, а выводы — к четким рецептам. Можно сказать, что с использования методов линейной алгебры начинается изучение любого объекта и им же заканчивается. Умение составить правильный общий взгляд на исследуемый социально-экономический процесс особенно важно при выработке управленческих решений.

Учитывая вышесказанное, очевидно, что усвоение материала данного раздела способствует формированию следующих компетенций:

- владение культурой мышления, способность к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения;
- способность выбирать математические модели организационных систем, анализировать их адекватность, проводить адаптацию моделей к конкретным задачам управления;
- способность использовать методы сбора, обработки и интерпретации комплексной социальной информации для решения организационно-управленческих задач, в том числе находящиеся за пределами непосредственной сферы деятельности.

После освоения раздела I студент должен:

знать

- основные понятия и методы линейной алгебры и аналитической геометрии, необходимые как для решения конкретных профессиональных задач, так и для успешного изучения других математических дисциплин;

уметь

- применять методы линейной алгебры для решения профессиональных задач;

владеть

- навыками решения задач линейной алгебры и аналитической геометрии.

Глава 1
ВЕКТОРЫ И МАТРИЦЫ

1.1. Векторы и векторные пространства

Одним из основных и начальных понятий линейной алгебры является понятие вектора. Напомним «школьное» понятие вектора как направленного отрезка. В отличие от числа (скаляра) вектор характеризуется не только величиной (длиной), но и направлением. Подчеркнем, что вектор не зависит от своего положения в пространстве: параллельный перенос вектора не меняет его. В соответствии с этим представлением вводятся следующие три операции над векторами.

Умножение вектора на число есть изменение длины вектора в указанное число раз (без изменения направления), если число положительное, и его дополнительный поворот в противоположную сторону, если это число отрицательное.

Сложение векторов происходит по следующему правилу. Векторы-слагаемые распологаются таким образом, чтобы начало каждого последующего вектора совпадало с концом предыдущего. Суммой векторов называется вектор, начало которого совпадает с началом первого, а конец — с концом последнего. Это правило часто называют *правилом треугольника*. Название имеет наглядный геометрический смысл, если слагаемых всего два: слагаемые векторы и вектор суммы образуют треугольник. Легко заметить, что сумма векторов не зависит от перестановки слагаемых, т.е. сложение векторов коммутативно:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}.$$

Скалярным произведением двух векторов называют число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Скалярное произведение векторов не меняется при перестановке сомножителей. Векторы ненулевой длины, скалярное произведение которых равно нулю, называются ортогональными (угол между ними равен 90°). Нулевой вектор считается ортогональным к любому ненулевому.

Теперь напомним знакомое со школы алгебраическое описание векторов. Выберем в пространстве декартову систему координат, т.е. построим три пересекающиеся попарно ортогональные оси, точку пересечения которых назовем началом координат. Далее выберем отрезок, длину которого примем за единицу измерения, общую для всех трех осей. Теперь каждую точку пространства мы можем однозначно определить тремя числами — проекциями точки на каждую из координатных осей: $M=M(x,y,z)$. Эти числа назовем координатами точки. Любой вектор как направленный отрезок можно идентифицировать его начальной и конечной точками (с указанием, какая из них начальная). Координатами вектора называют разности соответствующих координат конечной и начальной точек. Так, если вектор $\vec{a}$ начинается в точке $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и заканчивается в точке $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ имеет координаты соответственно $a_x = x_2 - x_1$, $a_y = y_2 - y_1$ и $a_z = z_2 - z_1$. Очевидно, что при таком определении параллельный перенос вектора не меняет его координат. Длина вектора (его модуль) $|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$. Теперь любой вектор в пространстве мы можем характеризовать тоже тремя числами, записанными в виде строки (или столбца): $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Операции над векторами, описанные выше, в координатном представлении имеют вид $\lambda\vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$; $\vec{a} + \vec{b} = (a_x,\ a_y,\ a_z) + (b_x, b_y, b_z) = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$ и скалярное произведение двух векторов $\vec{a}\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Мы рассматривали векторы в нашем трехмерном пространстве. Если мы ограничимся векторами, лежащими в плоскости, то каждый из них можно определить уже только двумя координатами: $\vec{a} = (a_x, a_y)$. При описании же векторов, лежащих только на заданной прямой, можно обойтись только одной координатой (правда, в последнем случае можно обойтись вообще без понятия вектора и работать только со скалярами). Замечаем, что теперь при проведении любых операций с векторами мы можем отвлечься от их геометрической интерпретации. Мы будем работать с табличками (вектор-строками или вектор-столбцами) по правилам, определенным выше. Вот эти абстрактные таблички мы в дальнейшем и будем называть векторами.

При таком взгляде на вещи мы вправе рассматривать векторы с любым числом координат — векторы любой размерности. При этом мы сохраним, когда это потребуется, понятие ортогональности векторов: $\vec{a} \perp \vec{b}$, если $\vec{a}\vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0$. Здесь i — номер координаты вектора (выше мы обозначали их буквами), а n — число координат векторов (их размерность). Складывать и перемножать можно только векторы одной размерности. А можно ли прийти к понятию абстрактного вектора, не опираясь на ортогональную систему координат? Для ответа на этот вопрос введем несколько новых понятий.

Набор векторов называется линейно зависимым, если один из них можно представить как сумму остальных, умноженных на подходящие коэффициенты, которые не равны нулю одновременно (такую сумму называют *линейной комбинацией*). Максимальное число линейно независимых векторов данного векторного пространства называется размерностью этого пространства n. Любые n линейно независимых векторов пространства $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ образуют его *базис*. Любой вектор этого пространства можно выразить как линейную комбинацию базисных (иначе базисных векторов было бы больше): $\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{e}_i$.

Выразим, например, вектор $\vec{d} = (1, 2, 3)$ как линейную комбинацию векторов $\vec{a} = (1, 0, 1)$, $\vec{b} = (0, 1, 2)$ и $\vec{c} = (1, 1, -1)$. Нам нужно найти такие числа α,

β и γ, которые обеспечат выполнение равенства $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$. Записывая это равенство в координатах, приходим к системе уравнений и ее решению:

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 1; \\ \beta + \gamma = 2; \\ \alpha - 2\beta - \gamma = 3 \end{cases} \to \begin{cases} \alpha = 1/2; \\ \beta = 3/2; \\ \gamma = 1/2 \end{cases} \to \vec{d} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}.$$

В случае же, если вектор $\vec{d} = (1,1,1)$, а векторы $\vec{a} = (1,0,2)$, $\vec{b} = (3,1,1)$ и $\vec{c} = (0,1,-5)$, то аналогично предыдущему имеем

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 1; \\ \beta + \gamma = 1; \\ 2\alpha + \beta - 5\gamma = 1 \end{cases} \to \begin{cases} \alpha = 1 - 3\beta; \\ \gamma = 1 - \beta; \\ 4 = 0\,?!! \end{cases}$$

Решения нет, следовательно, не всякий трехмерный вектор можно разложить по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Это может быть только в случае, если указанные три вектора линейно зависимы. Действительно, попробуем образовать нулевую линейную комбинацию этих векторов: $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0$. Расписывая векторное равенство по компонентам, получаем

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 0; \\ \beta + 1 = 0; \\ 2\alpha + \beta - 5\gamma = 0 \end{cases} \to \begin{cases} \alpha = 3; \\ \beta = -1; \\ \gamma = 1 \end{cases} \to 3\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = 0.$$

Заметим, что пока мы не опирались на понятие ортогональности. Теперь координатами вектора можно считать коэффициенты a_i в разложении вектора по любому выбранному базису. Декартовой же системе координат соответствует базис единичных, попарно ортогональных векторов, называемый *ортонормированным базисом*. В случае рассматриваемых в школе векторов-отрезков единичные базисные векторы направлены по осям координат.

Таким образом, мы назовем *арифметическим вектором* набор чисел, а операции над векторами определим как указанные выше операции над их компонентами. Далее, как уже упоминалось выше, мы будем работать как раз с такими абстрактными векторами. Более того, можно и операции над компонентами определить разными способами. Важно только удовлетворить некоторым условиям (см. ниже), и тогда можно перенести результаты, полученные для направленных отрезков, на векторные величины, описывающие объекты любой природы.

В качестве примера применения векторных величин рассмотрим следующую ситуацию.

Пример 1.1

В некотором городе проживает 150 тыс. детей и подростков, 400 тыс. работающих взрослых и 120 тыс. пенсионеров. При анализе многих социальных и экономических вопросов по организации жизни людей в данном городе структуру его населения можно представить «демографическим» вектором $\vec{a} = (150, 400, 120)$. Пусть население соседнего города описывается своим демографическим вектором $\vec{b} = (50, 300, 20)$. Обращаем внимание на разное соотношение работников и иждивенцев в этих городах. Скорее всего, второй город бурно развивается, и туда съезжается молодежь из других областей. Пригороды обоих городов занимают примерно одну и ту же площадь, на которой ведется однотипная хозяйственная деятельность, и их население описывается одинаковыми демографическими векторами $\vec{c} = (180, 200, 50)$. Принято решение объединить перечисленные пункты в один регион и всемерно усилить производственные связи между ними. Тогда это, более крупное, образование будет уже характеризоваться своим демографическим вектором $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c} = (560, 1100, 240)$. Изменившееся соотношение между возрастными группами обязательно вызовет изменение планов развития инфраструктуры во всем регионе. Естественно, что для прояснения многих вопросов потребуется более подробное описание структуры населения путем разбиения его на большее количество возрастных групп и перехода к векторам большей размерности.

В данном примере затруднительно придать смысл введенному выше скалярному произведению векторов или их модулям.

Естественно, что в курсе математики мы главное внимание уделим описанию аппарата работы с абстрактными векторными объектами, рассматривая конкретные ситуации только в качестве примеров. Ниже приведем некоторые формальные определения.

Определение 1.1. *Арифметическим вектором* называется упорядоченный набор чисел, называемых компонентами вектора. Число компонент вектора называется его размерностью.

Определение 1.2. Множество всех арифметических векторов данной размерности с действительными компонентами, в котором определены действия сложения и умножения вектора на число, удовлетворяющие указанным ниже свойствам (рассматриваемым как аксиомы), называется *векторным пространством*. Векторное n-мерное пространство обычно обозначается R^n.

Свойства операций:

1) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$;
2) $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$;
3) $a(b\vec{x}) = (ab)\vec{x}$;
4) $a(\vec{x} + \vec{y}) = a\vec{x} + a\vec{y}$;
5) $(a + b)\vec{x} = a\vec{x} + b\vec{x}$;
6) существует нулевой вектор $\vec{0} = (0, 0, ..., 0)$ такой, что $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$;
7) для любого вектора $\vec{x}$ существует противоположный вектор $-\vec{x}$ такой, что $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$;
8) $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$ для любого $\vec{x}$.

Если в векторном пространстве определено скалярное произведение (это можно сделать по-разному), то такое пространство называется *евклидовым*. В евклидовом пространстве всегда можно определить длину вектора как $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$, где $\vec{a} \cdot \vec{a}$ — скалярное произведение вектора на самого себя. Мы будем пользоваться привычным для нас определением: $\vec{a}\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$.

1.2. Матрицы и действия с ними

Определение 1.3. *Матрицей* A называют прямоугольную таблицу чисел a_{ij}, которые имеют два индекса: первый — номер строки и второй — номер столбца таблицы-матрицы. Числа эти называют *матричными элементами*.

При равенстве количества строк и столбцов матрица называется *квадратной*. Если в квадратной матрице на главной диагонали (из левого верхнего угла в нижний правый) стоят единицы, а все остальные элементы — нули, то такую матрицу называют *единичной* и обозначают E. В треугольной матрице все элементы по одну сторону от главной диагонали равны нулю.

Рассмотрим действия над матрицами:

1) умножение матрицы на число равносильно умножению всех матричных элементов на это число;

2) суммой матриц называют новую матрицу, все элементы которой есть суммы соответствующих элементов матриц-слагаемых;

3) произведение двух матриц A и B равно третьей матрице C, элементы которой выражаются через элементы матриц-сомножителей по формуле $c_{ij}=\sum\limits_k a_{ik}b_{kj}$. Очевидно, что указанное суммирование возможно, если только количество столбцов первой матрицы совпадает с количеством строк второй;

4) транспонирование матрицы A есть переход к новой матрице A^T, в которой строки заменены столбцами ($a_{ij}^T=a_{ji}$).

Вектор — частный случай матрицы. Умножение вектора-строки на вектор-столбец по правилу умножения матриц эквивалентно скалярному произведению данных векторов. Интересно, что, как правило, $AB\neq BA$ (некоммутативность умножения матриц).

Произведение матриц ассоциативно: $ABC=(AB)C=A(BC)$, т.е. очередность перемножения соседних матриц может быть произвольной, если не нарушается порядок следования матриц.

Для доказательства равенства необходимо доказать равенство одинаковых матричных элементов матриц по обе стороны равенства. Если обозначить $AB=V$, то матричный элемент $v_{is}=\sum\limits_k a_{ik}b_{ks}$. Далее, $P=(AB)C=VC$ и матричный элемент

$$p_{ij}=\sum_s v_{is}c_{sj}=\sum_s\left(\sum_k a_{ik}b_{ks}\right)=\sum_{s,k}a_{ik}b_{ks}c_{sj}.$$

Если теперь обозначим $BC=W$, то матричный элемент $w_{kj}=\sum\limits_s b_{ks}a_{sj}$. Полагая $Q=A(BC)=AW$, находим для матричного элемента

$$q_{ij}=\sum_k a_{ik}w_{kj}=\sum_k a_{ik}\left(\sum_s b_{ks}c_{sj}\right)=\sum_{k,s}a_{ik}b_{ks}c_{sj}.$$

Так как порядок суммирования можно менять, то $p_{ij}=q_{ij}$ и $P=Q$.

Докажем правило транспонирования произведения матриц: $(AB)^T = B^TA^T$. Вводя новые матрицы по формулам $(AB)^T = V$ и $B^TA^T = W$, получим выражения для их матричных элементов

$$v_{ij} = \left(\sum_k a_{ik}b_{kj}\right)^T = \sum_k a_{jk}b_{ki} = \sum_k b_{kj}a_{ik} = \sum_k (b^T)_{ik}(a^T)_{kj}$$

и $w_{ij} = \sum_k (b^T)_{ik}(a^T)_{kj}$. Их равенство доказывает указанное выше правило.

1.3. Определитель квадратной матрицы

В данном параграфе будет рассмотрена очень важная числовая характеристика квадратных матриц — определитель матрицы. К сожалению, определение этой величины носит формальный, абстрактный характер. Однако трудность при освоении указанной величины с лихвой окупается выгодой ее использования при определении зависимости групп векторов, анализе матричных уравнений и систем линейных алгебраических уравнений. Для скорейшего овладения навыками использования свойств определителей матриц настоятельно рекомендуется разобраться в доказательствах этих свойств, сформулированных ниже.

Если в последовательности чисел есть пара, в которой большее число предшествует меньшему, то такое явление называется *инверсией*. Например, в элементе $a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}$ в последовательности номеров столбцов есть четыре инверсии: (2, 1), (4, 3), (4, 1) и (3, 1).

Определение 1.4. *Определителем квадратной матрицы n-го порядка* называется число, равное сумме $n!$ ($n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$) различных членов, каждый из которых является произведением n элементов матрицы, взятых по одному из каждого столбца и из каждой строки. Причем знак каждого члена определяется как $(-1)^J$, где J — число инверсий в последовательности номеров столбцов для данного слагаемого, если сомножители в нем расположены в порядке возрастания их номеров строк.

Определителем $|A|$ матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 2-го порядка называют число, равное $|A| = \Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$. Существует простой рецепт и для вычисления определителя матриц 3-го порядка. Ниже будет показано, как определители высокого порядка выражаются через определители более низкого порядка.

Определение 1.5. *Минором M_{ij} элемента a_{ij}* квадратной матрицы A n-го порядка называется определитель матрицы $(n - 1)$-го порядка, полученной из A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. Например, минор M_{13} для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

равен $M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$. В указанном миноре отсутствуют элементы первой строки и третьего столбца.

Определение 1.6. *Алгебраическим дополнением* A_{ij} элемента a_{ij} матрицы A называется число, равное $(-1)^{i+j} M_{ij}$.

Рассмотрим свойства определителей.

1. Если какая-нибудь строка (столбец) матрицы состоит из одних нулей, то ее определитель равен нулю (см. определение).

2. Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число, то ее определитель умножится на то же число (см. определение).

3. При транспонировании матрицы ее определитель не меняется: $|A| = |A^T|$.

Действительно, в каждом слагаемом в выражении для определителя каждая строка и каждый столбец представлены один раз, поэтому и в $|A|$, и в $|A^T|$ мы имеем слагаемые, образованные одними и теми же матричными элементами. В этом смысле строки и столбцы равноправны. Остается убедиться, что при замене строк столбцами знак перед каждым слагаемым не изменится. Для этого рассмотрим какое-нибудь слагаемое и упорядочим его сначала по номерам строк (определитель начальной матрицы), а потом по номерам столбцов (определитель транспонированной матрицы).

Легко увидеть, что число инверсий в первом варианте равно числу рациональных перестановок соседних элементов, выполненных для упорядочения номеров столбцов. Рациональными мы называем такие перестановки, которые восстанавливают расположение чисел в порядке возрастания. При произвольном способе упорядочения все рациональные перестановки происходят нечетное число раз, а все нерациональные — четное, они не меняют знак перед слагаемым. Поэтому можно при определении знака перед слагаемым в определителе считать все перестановки соседних элементов, при котором придем к заданному расположению. При этом мы переходим ко второму варианту записи, соответствующему определителю транспонированной матрицы. Естественно, что обратный процесс потребует то же самое число рациональных перестановок, а значит, в записи для $|A|$ данный член будет иметь тот же знак, что и в записи для $|A^T|$.

4. При перестановке двух строк (столбцов) ее определитель меняет знак.

При упорядочении элементов по строкам в определителях, у которых переставлены i-я строка с $(i+k)$-й, два соответствующих слагаемых будут переходить друг в друга с помощью $2k-1$ перестановок соседних элементов. Поэтому они должны отличаться знаком (см. свойство 3).

Следствие 1: Определитель матрицы с одинаковыми строками равен 0.

Следствие 2: Определитель матрицы с пропорциональными строками равен 0.

5. **Теорема 1.1 (Лапласа,** частный случай). *Определитель квадратной матрицы размера* $m \times m$ *равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения*:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{im}A_{im} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}A_{ij}.$$

Рассмотрим все слагаемые в определителе $|A|$, содержащие заданный элемент a_{ij}. Очевидно, что их сумма будет равна по модулю $a_{ij}M_{ij}$. А каков будет правильный знак? Переставим i строк и j столбцов в матрице так, чтобы наш элемент оказался в первом столбце и первой строке, при этом ее определитель умножится на $(-1)^{i+j}$. В этом новом определителе сумма членов, пропорциональных заданному элементу a_{ij}, равна $a_{ij}M_{ij}$. Действительно, все инверсии внутри минора уже учтены, а наш элемент, поскольку он теперь должен стоять на первом месте, не дает новых инверсий. Следовательно, в исходном определителе перед данным слагаемым должен появиться множитель $(-1)^{i+j}$, и мы можем заменить M_{ij} на A_{ij}. Проводя аналогичные рассуждения для всех остальных элементов i-й строки (j-го столбца), приходим к требуемой формуле.

6. Сумма произведений элементов строки (столбца) i матрицы на соответствующие алгебраические дополнения строки j равна определителю матрицы, если $i = j$, и равна 0, если $i \neq j$, т.е. $\sum_{s} a_{is}A_{js} = \delta_{ij}|A|$, где δ_{ij} — символ Кронекера: $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$, и $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$ (см. свойства определителей 4 и 5).

7. Определитель матрицы не изменится, если к какой-либо строке (столбцу) прибавить линейную комбинацию других строк (столбцов) той же матрицы.

8. Сумма произведений произвольных чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ на алгебраические дополнения любой строки (столбца) равна определителю матрицы, полученной путем замены элементов этой строки (столбца) на указанные числа (см. теорему Лапласа).

9. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей: $|AB| = |A| \cdot |B|$.

Рассмотрим четыре квадратные матрицы A, B, $C = AB$ и G:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix};\ G = \begin{pmatrix} A & Q \\ -E & B \end{pmatrix}.$$

Три первые матрицы имеют размер $n \times n$, а вспомогательная квадратная матрица удвоенного размера $2n \times 2n$ состоит из четырех квадратных матриц A, Q, $-E$, B. Матрицы-сомножители A, B входят в G непересекающимися блоками вдоль главной диагонали. В левой нижней четверти матрицы G расположена диагональная матрица, все диагональные элементы которой равны -1. Все элементы матрицы Q равны 0. Легко видеть, что определитель матрицы G равен произведению определителей ее диагональных блоков. Действительно, все произведения в определителе, содержащие элементы из левого нижнего блока, неизбежно содержат хотя бы один элемент из правого верхнего и равны нулю. Все инверсии внутри комбинаций элементов диагональных блоков учтены при подсчете определителей этих блоков, а «межблочные» инверсии, очевидно, отсутствуют. Таким образом, $|G| = |A| \cdot |B|$.

Рассмотрим теперь еще одну вспомогательную матрицу G_1, которая получается из матрицы G, если мы прибавим к каждому $(n+j)$-му столбцу, где $j = 1, 2, ..., n$, сумму первых n столбцов, взятых с коэффициентами $b_{1j}, b_{2j}, ..., b_{nj}$. При этом определитель новой матрицы совпадает со старой, $|G_1| = |G|$ (см. свойство определителей 7). Замечаем, что в получившейся матрице нижний правый блок состоит из одних нулей, верхний правый совпадает с матрицей C, а блоки в левой половине остались без изменения:
$$G_1 = \begin{pmatrix} A & C \\ -E & Q \end{pmatrix}.$$

Переставив n последних столбцов на n первых мест, мы придем к матрице такого же типа, что и матрица G. Ее определитель будет равен $(-1)^n |C|$. Следовательно, определитель матрицы G_1 будет равен $(-1)^{n(n+1)} |C| = |C|$, так как перестановка n строк на n мест привела к дополнительному множителю (-1) в степени n^2 и произведение $n(n+1)$ всегда четно. А так как $|G_1| = |G|$ в силу свойств определителей, то $|G| = |A| \cdot |B| = |C|$.

Используя эти свойства, вычисление определителя n-го (сколь угодно большого) порядка сводится к произведению $(n - 2)$ чисел на определитель 2-го порядка. Действительно, добавляя к каждой i-й строке матрицы $(i > 1)$ первую строку, умноженную на отношение первых коэффициентов $(-a_{11}/a_{i1})$, приходим к матрице, в одном из столбцов которой все элементы, кроме первого, равны нулю. Раскладывая определитель по элементам указанного столбца, приходим к необходимости вычисления определителя $(n - 1)$-го порядка. Проделав же подобную процедуру $n - 2$ раза, придем к единственному определителю второго порядка.

Пример 1.2

Вычислим определитель $|A|$, следуя описанной выше процедуре:
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение

Символом C_i будем обозначать i-ю строку:
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \to C_1 \\ C_2 \to C_2 - 2C_1 \\ C_3 \to C_3 - C_1 \\ C_4 \to C_4 + C_1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \to C_1 \\ C_2 \to C_2 \\ C_3 \to C_3 + C_2 \\ C_4 \to C_4 + 3C_2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \to C_1 \\ C_2 \to C_2 \\ C_3 \to C_3 \\ C_4 \to C_4 - 2C_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot 3 = -6.$$

1.4. Обратная матрица

Определение 1.7. Матрица A^{-1} называется *обратной* к квадратной матрице A с ненулевым определителем, если $A^{-1}A = AA^{-1} = E$, где E — единичная матрица.

Отметим, что матрица с нулевым определителем (*вырожденная матрица*) не может иметь обратной в силу свойства 9 определителей. Матрица E в матричной алгебре играет роль единицы в арифметике: для любой матрицы A справедливо равенство $AE = A$ и $EA = A$. Подчеркнем, что в каждом из последних равенств размер единичной матрицы подбирается таким, чтобы было возможно умножение.

Используя определение квадратной матрицы, можно в символическом виде записать решения матричных уравнений $AX = B$ и $XA = B$: в первом случае $X = A^{-1}B$, во втором — $X = BA^{-1}$.

Единственность: обратная матрица, если она существует, единственна.

Пусть существует еще одна матрица Z, такая, что $AZ = E$. Умножим последнее равенство на A^{-1} слева и получим $A^{-1}AZ = A^{-1}E = A^{-1} \Rightarrow Z = A^{-1}$.

Вычисление обратной матрицы. Мы познакомимся с двумя способами вычисления обратной матрицы:

1) метод присоединенной матрицы;

2) метод элементарных преобразований.

Определение 1.8. Матрица A' называется *присоединенной* к матрице A, если она составлена из алгебраических дополнений к элементам матрицы A, а затем транспонирована. Таким образом, каждому элементу a_{ij} в A соответствует a_{ji} в A'.

Теорема 1.2. *Для любой невырожденной матрицы A справедливо равенство* $A^{-1} = \dfrac{A'}{|A|}$.

Действительно, умножая A' на A, мы в силу свойства 6 определителей получим диагональную матрицу с одинаковыми диагональными элементами, равными $|A|$. Разделив же A' на определитель $|A|$, придем к матрице E.

Данная теорема дает один из способов вычисления обратной матрицы — *метод присоединенной матрицы*. Его недостатком является громоздкость, связанная с необходимостью вычисления большого числа определителей (алгебраических дополнений).

Найдем в качестве примера методом присоединенной матрицы обратную матрицу A^{-1} к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Ее определитель $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 1 - 2 = -1$. Алгебраические дополнения равны:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1;\ A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1;\ A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2;\ A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1;\ A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-2;\ A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}=1;\ A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1.$$

Присоединенная матрица $A'=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -2 & 1 & 2\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$, а обратная матрица A^{-1} $= \dfrac{A'}{|A|}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -2\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}$.

На практике часто используют другой метод — *метод элементарных преобразований*. К числу последних относятся:

1) перестановка строк (столбцов);

2) умножение строки (столбца) на отличное от нуля число;

3) прибавление ко всем элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), предварительно умноженных на некоторое число.

Суть метода состоит в следующем. Для невырожденной квадратной матрицы A n-го порядка строится прямоугольная матрица $(A|E)$ размера $n\times 2n$ путем приписывания к матрице A справа единичной матрицы. Далее с помощью элементарных преобразований мы приводим прямоугольную матрицу к виду $(E|B)$. При этом оказывается, что полученная матрица $B=A^{-1}$. Попробуем обосновать этот метод.

Сформулируем сначала несколько вспомогательных утверждений («маленьких» теорем). В математике их часто называют леммами.

Лемма 1.1. Каждому из перечисленных выше элементарных преобразований соответствует матрица, умножение которой на данную матрицу эквивалентно указанному преобразованию.

Говорят, что каждому преобразованию (оператору) соответствует своя матрица. Укажем их. Так, если мы хотим переставить первую строку нашей матрицы со второй, мы можем умножить матрицу O_1 на нашу матрицу. O_1 получается из матрицы E переменой первой и второй строки. Умножению на число λ строки нашей матрицы (например, второй) соответствует матрица $O_2(\lambda)$, которая получается опять-таки из матричной единицы E умножением указанной строки (второй в данном примере) на указанное число. Наконец, прибавление к i-й строке матрицы j-й строки (например, к первой прибавим последнюю строку, умноженную на λ) эквивалентно умножению матрицы $O_3(\lambda)$ на исходную матрицу. Матрица $O_3(\lambda)$ получается из матрицы E путем замены нуля на пересечении i-й строки и j-го столбца числом λ. Ниже приведены матрицы O_1, O_2, O_3 в указанных случаях:

$$O_1=\begin{pmatrix}0 & 1 & \dots & 0\\ 1 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix};\ O_2(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix};\ O_3(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & \lambda\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}.$$

Следует отметить, что указанные преобразования применимы к любым прямоугольным матрицам, число строк которых совпадает с числом столбцов квадратных матриц O_1, O_2, O_3.

Лемма 1.2. Если мы умножаем любую квадратную матрицу D порядка n на матрицу K размером $n \times 2n$ (столбцов вдвое больше, чем строк), то мы получим прямоугольную матрицу размером $n \times 2n$. Причем в ее первой (левой) половине будет стоять произведение матрицы D на левую половину матрицы K, а в правой — произведение D на правую половину K, т.е. если $K = (B|C)$, то справедливо равенство $DK = (DB|DC)$.

Доказательство обеих лемм следует из правила перемножения матриц.

Таким образом, если мы сумели путем элементарных преобразований привести матрицу $K = (A|E)$ к виду $(E|B)$, то существует такая матрица O (какое-то произведение конечного числа матриц O_1, O_2, O_3), что $OA = E$ и $OE = B$. Но тогда, по определению, $O = A^{-1}$ и $O = B$, т.е. в правой половине получившейся матрицы $(E|B)$ будет стоять искомая обратная матрица A^{-1}.

Возвратимся теперь к решению матричных уравнений, начатому в начале данного параграфа. После вычисления и подстановки обратной матрицы в формулу $X = A^{-1}B$ для уравнения $AX = B$ и формулу $X = BA^{-1}$ для уравнения $XA = B$ получаем решения указанных матричных уравнений.

Найдем методом элементарных преобразований обратную матрицу A^{-1} для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сформируемм матрицу

$$(A|E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Комбинируя строки, добиваемся появлению в левой половине матрицы $(A|E)$ единичной матрицы E (в выкладках ниже i-ю строку будем обозначать как C_i):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{cases} C_1 \to C_1, \\ C_2 - C_1 \to C_2, \to \\ C_3 \to C_3 \end{cases} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{cases} C_1 - C_2 + C_3 \to C_1, \\ C_2 - C_3 \to C_2, \\ C_3 \to C_3 \end{cases} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В правой половине стоит искомая матрица

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.5. Ранг матрицы

Если мы в прямоугольной матрице A возьмем произвольные k строк и k столбцов, то элементы, стоящие на пересечении этих строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка k, определитель которой называется *минором k-го порядка матрицы A*.

Определение 1.9. *Рангом r* матрицы A называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы. Любой ненулевой минор порядка r называется *базисным минором*. Ранг матрицы обозначим $\operatorname{rang} A$.

Мы познакомимся с двумя методами вычисления ранга матрицы:

1) методом окаймляющих миноров;

2) методом элементарных преобразований.

Суть первого метода в следующем. Пусть в матрице A найден ненулевой минор k-го порядка M. Рассмотрим все миноры $(k + 1)$-го порядка, включающие в себя (окаймляющие) минор M; если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k. В противном случае среди окаймляющих миноров найдется ненулевой и вся процедура повторяется. Что касается второго метода, то мы дополним список элементарных преобразований, указанных выше, еще двумя:

1) отбрасывание нулевой строки (столбца);

2) транспонирование матрицы.

Теорема 1.3. *Ранг матрицы при элементарных преобразованиях не меняется.*

Это утверждение непосредственно следует из свойств определителей.

С помощью элементарных преобразований матрица приводится к ступенчатому[1] (треугольному, если она квадратная) виду, тогда вычисление ее ранга не составляет труда (см. доказательство следующей теоремы).

Теорема 1.4 (о ранге матрицы). *Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк*[2] (*столбцов*), *через которые линейно выражаются все остальные строки* (*столбцы*).

Действительно, если у нас только r строк линейно независимы, то любая новая, $(r + 1)$-я, строка будет линейной комбинацией независимых. Любой минор на этих строках (в силу свойств определителей) равен нулю. Следовательно, ранг матрицы не может быть больше r. С другой стороны, элементарными преобразованиями мы всегда можем свести матрицу, образованную указанными r строками, к ступенчатому виду. Причем если в какой-нибудь строке на главной диагонали окажется 0, мы переставим данный столбец с одним из тех, который стоит правее и не содержит 0 в данной строке. Такой столбец обязательно найдется (иначе данная строка будет состоять из одних нулей, а это невозможно в силу линейной независимости первых r строк). Минор, стоящий слева в полученной матрице, не равен нулю и имеет порядок r. Следовательно, начальная матрица имеет точно такой же минор и ее ранг равен r.

Можно привести и другое доказательство этой теоремы.

[1] Ступенчатой мы будем называть прямоугольную матрицу, вторая строка которой начинается с одного нуля, третья строка — с двух нулей и т.д.

[2] Линейная зависимость строк матрицы означает, что хотя бы одна из ее строк является линейной комбинацией остальных.

Пусть матрица размера $n \times m$ имеет ненулевой минор M r-го порядка (для определенности пусть он соответствует верхнему левому углу матрицы), а все миноры порядка $(r + 1)$ равны нулю. Покажем, что любую k-ю строку ($k > r$) матрицы можно выразить через r первых строк. Для этого рассмотрим минор

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{k1} & \dots & a_{kr} & a_{kj} \end{vmatrix},$$

окаймляющий наш исходный минор $M = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}$.

Этот минор равен 0 (по условию, если $j > r$, и по свойству определителей с равными столбцами, если $j \le r$). Разложив его по последнему столбцу, мы получим равенство $\sum\limits_s a_{sj} A_{sj} = 0$, где алгебраические дополнения A_{sj} зависят только от номера строки k, но не зависят от номера столбца j, который пробегает все значения от 1 до m. Поскольку при этом по крайней мере одна из величин A_{sj} (при $s = k + 1$ это наш ненулевой минор) отлична от нуля (по условию), указанное равенство означает линейную зависимость любой строки матрицы от ее первых r строк. Первые же r строк линейно независимы, так как $M \neq 0$.

Метод окаймляющих миноров также легко обосновывается с помощью теоремы о ранге матрицы (перебирая окаймляющие миноры, мы убеждаемся в линейной зависимости или независимости выбранных строк).

Контрольные вопросы и задания

1. Каков базис в линейном пространстве?
2. Какие матрицы можно перемножать?
3. В каких случаях определитель матрицы равен нулю?
4. Для каких матриц существует обратная матрица?
5. Опишите, как определить ранг матрицы.

Практикум по решению задач

Упражнение 1.1. Определим, являются ли трехмерные векторы $\vec{a} = (1, 3, -1)$, $\vec{b} = (4, -1, 2)$ и $\vec{c} = (-2, 7, -4)$ линейно зависимыми.

Решение

Для наличия линейной зависимости векторов должны существовать три не равных одновременно нулю числа α, β и γ, которые обеспечат справедливость векторного равенства $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0$, или (что то же самое) удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta - 2\gamma = 0, \\ 3\alpha - \beta + 7\gamma = 0, \\ -\alpha + 2\beta - 4\gamma = 0. \end{cases}$$

Выразив из последнего уравнения первое число $\alpha = 2\beta - 4\gamma$ и подставляя это выражение в первые два уравнения системы, приходим к уравнениям $6\beta - 6\gamma = 0$ и тождеству $0 = 0$. Следовательно, для любого γ и $\beta = \gamma$, $\alpha = -2\gamma$ выполняется указанное выше векторное равенство, например оно выполняется при $\beta = \gamma = 1$; $\alpha = -2$. Таким образом, векторы линейно зависимы.

Упражнение 1.2. Определим, являются ли трехмерные векторы $\vec{a} = (1, 1, -1)$, $\vec{b} = (2, -1, 2)$ и $\vec{c} = (1, 3, 1)$ линейно зависимыми.

Решение

Рассуждая так же, как в предыдущем упражнении, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0, \\ \alpha - \beta + 3\gamma = 0, \\ -\alpha + 2\beta + \gamma = 0. \end{cases}$$

Выразив из последнего уравнения первое число $\alpha = 2\beta + \gamma$ и подставляя это выражение в первые два уравнения системы, приходим к уравнениям $4\beta + 2\gamma = 0$ и $\beta + 4\gamma = 0$. Подставляя теперь выражение для β из второго уравнения в первое, получим $-14\gamma = 0 \to$ $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Мы получили единственное решение, и оно оказалось нулевым. Следовательно, наши векторы линейно независимы.

Примечание к упражнениям 1.1 и 1.2. Если данная задача дается после того, как студенты познакомились со свойствами определителя, то возможно более простое решение. Действительно, если три трехмерных вектора линейно зависимы, то определитель, строками которого являются координаты соответствующего вектора, равен нулю. В противном случае, векторы линейно независимы. В упражнении 1.1 указанный определитель $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 7 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 4 - 28 - 12 + 2 - 14 + 48 = 0$, и указанные векторы линейно зависимы. В упражнении 1.2 соответствующий определитель не равен нулю: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 2 - 6 - 1 - 6 - 2 = -14$. Следовательно, указанные в задаче векторы являются линейно независимыми.

Упражнение 1.3. Пусть даны три матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ и } C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем линейную комбинацию матриц $2A - B + 3C^T$.

Решение

Сначала, записывая строки как столбцы, получим $C^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Видим, что все матрицы-слагаемые имеют одинаковый размер (только такие матрицы и можно складывать). Умножая каждый элемент матрицы на указанный для этой матрицы множитель и складывая элементы, стоящие на одинаковых местах в матрицах-слагаемых, получаем:

$$2A - B + 3C^T = 2\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2-2+9 & 6+1-6 \\ 4-1+6 & 2-4+3 \\ 8+2+3 & -6-3+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 9 & 1 \\ 13 & 3 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 1.4. Вычислим произведения матриц, заданных в задаче 1.3: AC, AB^T и CB.

Решение

Умножение матриц происходит по правилу «строка на столбец». Перед началом выполнения умножения следует убедиться, что число столбцов в первом сомножителе совпадает с числом строк во втором сомножителе.

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot3-3\cdot2 & 1\cdot2+3\cdot1 & 1\cdot1+3\cdot4 \\ 2\cdot3-1\cdot2 & 2\cdot2+1\cdot1 & 2\cdot1+1\cdot4 \\ 4\cdot3+(-3)\cdot(-2) & 4\cdot2-3\cdot1 & 4\cdot1-3\cdot4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 13 \\ 4 & 5 & 6 \\ 18 & 5 & -8 \end{pmatrix};$$

$$AB^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot2-3\cdot1 & 1\cdot1+3\cdot4 & -1\cdot2+3\cdot3 \\ 2\cdot2-1\cdot1 & 2\cdot1+1\cdot4 & -2\cdot2+1\cdot3 \\ 4\cdot2-3\cdot(-1) & 4\cdot1-3\cdot4 & -4\cdot2-3\cdot3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 13 & 7 \\ 3 & 6 & -1 \\ 11 & -8 & -17 \end{pmatrix};$$

$$CB = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot2+2\cdot1-1\cdot2 & -3\cdot1+2\cdot4+1\cdot3 \\ -2\cdot2+1\cdot1-4\cdot2 & -2\cdot(-1)+1\cdot4+4\cdot3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -11 & 18 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 1.5. Вычислим определитель матрицы $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение

Для вычисления определителя мы будем использовать два способа: а) метод Гаусса (сведение матрицы к треугольному виду) и б) разложение по столбцу или строке с предварительным упрощением матрицы методом элементарных преобразований.

а) Если мы от 2-й и 4-й строк отнимем удвоенную 1-ю строку, а к 3-й строке прибавим 1-ю, то придем к матрице, у которой тот же самый определитель, а в 1-м столбце во всех строках, кроме 1-й, стоят нули. Затем, аналогичным образом комбинируя 3-ю и 4-ю строки со 2-й, мы придем к матрице, под главной диагональю которой стоят только нулевые элементы:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \to C_1 \\ C_2 - 2C_1 \to C_2 \\ C_3 + C_1 \to C_3 \\ C_4 - 2C_1 \to C_4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_1 \to C_1 \\ C_2 \to C_2 \\ C_3 + 4C_2 \to C_3 \\ C_4 - C_2 \to C_4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов, так как все остальные слагаемые в определителе содержат хотя бы один нулевой сомножитель. Таким образом, для нашей матрицы определитель

$$|A| = 1 \cdot (-1) \cdot (-12) \cdot 1 = 12.$$

б) Вторым общим методом вычисления определителя является метод разложения по строке (или столбцу). При этом процедура вычисления значительно упрощается, если в какой-либо строке или столбце есть только один ненулевой элемент. Такое у нас получалось в 3-й строке определителя в предыдущем пункте, но мы тогда шли другим путем. Теперь мы посмотрим на исходную матрицу и обратим внимание на то, что 2-я и 4-я строки почти совпадают. Вычтем из 4-й строки 2-ю, а к 3-й прибавим 1-ю. Определитель полученной матрицы затем разложим по 3-й строке по формуле $|A| = \sum_{j=1}^{4} a_{3j} A_{3j}$, где алгебраические дополнения связаны с минорами общим соотношением $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Второй метод приводит к следующей цепочке равенств:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \to C_1 \\ C_2 \to C_2 \\ C_3 + C_1 \to C_3 \\ C_4 - C_2 \to C_4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Получившийся определитель тоже можно разложить по 3-й строке, и мы получим окончательно

$$|A| = 4 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 12.$$

Упражнение 1.6. Найдем матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение

Присоединенная матрица A' получается из исходной транспонированием и заменой всех элементов их алгебраическими дополнениями: $a'_{ij} = A_{ji}$. Обратная же матрица получается из присоединенной матрицы делением ее на определитель исходной матрицы: $A^{-1} = A' / |A|$. Алгебраические дополнения нашей матрицы размером равны

$$A_{11} = (-1)^{1+1} a_{22} = 3; \; A_{21} = (-1)^{2+1} a_{12} = -1;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} a_{21} = -4; \; A_{22} = (-1)^{2+2} a_{11} = 2.$$

Тогда присоединенная матрица оказывается равной $A' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$. Легко видеть, что присоединенная матрица получается из исходной матрицы следующим образом: элементы на главной диагонали меняются местами, а перед обоими недиагональными элементами просто меняется знак. Определитель нашей матрицы равен $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2$, а обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 & -0{,}5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если наши вычисления верны, то произведение полученной матрицы на исходную должно давать единичную матрицу. Проверим это:

$$A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}1{,}5 & -0{,}5\\ -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-2 & 1{,}5-1{,}5\\ -4+4 & -2+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Наш результат верен.

Упражнение 1.7. Найдем матрицу, обратную к матрице $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$, двумя способами: а) методом присоединенной матрицы и б) методом элементарных преобразований.

Решение

а) Как было указано в предыдущей задаче, обратная матрица определяется формулой $A^{-1}=A'/|A|$, где элементы присоединенной матрицы A' связаны с алгебраическими дополнениями исходной матрицы равенством $a'_{ij}=A_{ji}$. Вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1;\; A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0;\; A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=2;\; A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1;\; A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=0;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=0;\; A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1;\; A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1.$$

Так как определитель исходной матрицы

$$|A|=1\cdot1\cdot1+1\cdot2\cdot2+2\cdot1\cdot1-(2\cdot1\cdot1+2\cdot1\cdot1+1\cdot2\cdot1)=1,$$

то $A^{-1}=A'=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

Полученная нами матрица действительно является обратной к исходной матрице:

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+2 & -1+1 & 1-1\\ -2+2 & -1+2 & 2-2\\ -2+2 & -1+1 & 2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

б) Теперь вычислим ту же матрицу методом элементарных преобразований. Припишем единичную матрицу к исходной и получим большую прямоугольную матрицу. Умножая строки на подходящие числа и затем складывая их, приведем левую половину большой матрицы к единичному виду:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}C_1\to C_1\\ C_2-2C_1\to C_2\\ C_3-2C_1\to C_3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}C_1\to C_1\\ -C_2\to C_2\\ C_2-C_3\to C_3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}C_1-C_2-C_3\to C_1\\ C_2\to C_2\\ C_3\to C_3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

В результате выполнения указанной цепочки преобразований строк мы в левой половине большой матрицы получили единичную матрицу 3-го порядка. При этом в правой половине большой матрицы автоматически получается матрица, обратная к первоначальной, $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

Упражнение 1.8. Решим матричные уравнения $AX=B$ и $XA=B$, где матрица $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$, а матрица $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$.

Решение

1. Умножая обратную матрицу A^{-1} на первое уравнение слева, получим равенство $A^{-1}AX=A^{-1}B$. Так как $A^{-1}A=E$, то $A^{-1}AX=EX=X=A^{-1}B$. Обратная матрица связана с присоединенной матрицей равенством $A^{-1}=A'/|A|$. Пользуясь рецептом получения присоединенной матрицы из исходной, изложенным в задаче 1.6, находим $A'=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$. Определитель $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{vmatrix}=5-6=-1$ и $A^{-1}=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}\cdot\dfrac{1}{-1}=\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$.

Неизвестная матрица равна

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10+6 & -5+4\\ 6-3 & 3-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}.$$

Для проверки подставим полученную матрицу в левую часть первого матричного уравнения и получим

$$AX=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4+6 & -1+2\\ -12+15 & -3+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}=B.$$

Решение верно.

2. Аналогично, умножая A^{-1} на первое уравнение справа, получим равенство $XAA^{-1}=BA^{-1}$, следовательно,

$$X=BA^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10+3 & 4-1\\ -15+6 & 6-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 3\\ -9 & 4\end{pmatrix}.$$

Чтобы проверить правильность полученного результата, подставляем его в левую часть второго уравнения и получим

$$XA=\begin{pmatrix}-7 & 3\\ -9 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7+9 & -14+15\\ -9+12 & -18+20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}=B.$$

Решение верно.

Замечаем, что решения первого и второго уравнений не совпадают.

Упражнение 1.9. Решим матричные уравнения $AX=B$ и $XA=B$, где матрица $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$ (та же самая, что и в задаче 1.7), а матрица $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

Решение

1. Для решения первого уравнения умножим на него слева обратную матрицу $A^{-1}AX=A^{-1}B$. Так как $A^{-1}A=E$, а обратная матрица A^{-1} уже вычислена в задаче 1.7, то

$$EX=X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+1 & -2+1 & -1+3\\ 2-2 & 4-1 & 2-2\\ 2-1 & 1-1 & 2-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Для проверки подставим полученную матрицу в левую часть первого матричного уравнения:

$$AX=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&2\\2&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-1&2\\0&3&0\\1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1+3&2-1\\2&-2+3&4-2\\1&-2+3&4-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&2\\1&1&3\end{pmatrix}=B.$$

Наше решение верно.

б) Для решения второго уравнения умножим на него справа обратную матрицу $XAA^{-1}=BA^{-1}$. Так как $AA^{-1}=E$, то

$$XE=X=BA^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&2\\1&1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&0&1\\2&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+4&-2+1&1-1\\-2+2&-1+2&2-2\\-1+2&-1+3&1-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1&0\\0&1&0\\1&2&-2\end{pmatrix}.$$

Отметим, что решение второго уравнения отличается от решения первого. Для проверки подставим полученную матрицу в левую часть второго матричного уравнения:

$$XA=\begin{pmatrix}3&-1&0\\0&1&0\\1&2&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&2\\2&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-2&3-1&3-2\\2&1&2\\1+4-4&1+2-2&1+4-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&2\\1&1&3\end{pmatrix}=B.$$

Наше решение верно.

Упражнение 1.10. Определим ранг прямоугольной матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2&-3&0\\2&4&-1&-2&1\\1&3&-3&1&1\\4&6&3&-8&1\end{pmatrix}.$$

Решение

Ранг матрицы равен числу линейно независимых строк в ней. Если мы приведем матрицу к ступенчатому виду, то линейно зависимые строки зануляться. Мы, складывая и вычетая строки, будем добиваться того, чтобы в первом столбце во всех строках, кроме первой, стояли нули. Затем мы будем добиваться появления нулей во втором столбце во всех строках, кроме первых двух, и т.д.:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2&-3&0\\2&4&-1&-2&1\\1&3&-3&1&1\\4&6&3&-8&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}C_1\to C_1\\C_2-2C_1\to C_2\\C_3-C_1\to C_3\\C_4-4C_1\to C_2\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&2&-3&0\\0&2&-5&4&1\\0&2&-5&4&1\\0&2&-5&4&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}C_1\to C_1\\C_2\to C_2\\C_3-C_2\to C_3\\C_4-C_2\to C_4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&-3&0\\0&2&-5&4&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Видим, что последние две строки полностью занулились — это означает, что они являются линейными комбинациями первых двух. Очевидно, что первые две строки линейно независимы (на какое бы число мы ни умножали вторую строку, она не будет равной первой строке, так как ее первый элемент нулевой). Таким образом, у нашей матрицы только две линейно независимые строки, и ранг матрицы равен двум.

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Определите, являются ли векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно зависимыми:

а) $\vec{a} = (1, 5, 2)$; $\vec{b} = (3, -1, 0)$; $\vec{c} = (-2, 4, 1)$;

б) $\vec{a} = (2, 1, -2)$; $\vec{b} = (1, 1, 2)$; $\vec{c} = (-1, 1, 3)$;

в) $\vec{a} = (1, 0, 2)$; $\vec{b} = (2, -1, 1)$; $\vec{c} = (3, -1, 3)$;

г) $\vec{a} = (1, 3, 2)$; $\vec{b} = (1, 1, 4)$; $\vec{c} = (-1, 1, -6)$.

1.2. Найдите матрицу $C = 3A - BA$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1.3. Найдите матрицу $C = BA - 3AB$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.4. Найдите матрицу $C = A - BA$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

1.5. Найдите матрицу $C = 2A^T - BA$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.6. Вычислите определитель матрицы:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; д) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; е) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -5 & 1 & -2 & -4 \\ 4 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

1.7. Вычислите матрицу, обратную к данной:

а) $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; д) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

1.8. Решите матричное уравнение $AX = B$:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1.9. Решить матричное уравнение $XA = B$:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1.10. Определите ранг матрицы:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Глава 2
СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Решение уравнений, описывающих изучаемый процесс, является целью практически любого теоретического исследования. Не всегда это возможно в полной мере, и приходится прибегать к различным приближенным методам анализа. Но точно решаемые задачи дают реперные точки в количественном описании изучаемой ситуации. Модели, которые описываются системами линейных уравнений, допускают исчерпывающий количественный анализ и поэтому широко распространены. Умение анализировать системы линейных уравнений обязательно входит в арсенал современного исследователя социально-экономических процессов. Знакомству с основными положениями и методами этого раздела линейной алгебры и приобретению необходимых навыков в решении систем линейных уравнений посвящена данная глава.

Рассмотрим сначала систему n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

В матричной форме эта система имеет простой вид $A\vec{x} = \vec{b}$, где A — матрица из коэффициентов уравнений нашей системы (матрица системы)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix};$$

неизвестный вектор $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ и правая часть $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$.

В случае если в правых частях всех уравнений стоят нули (все $b_i = 0$), система уравнений называется *однородной*.

2.1. Решение системы линейных уравнений при совпадении числа независимых уравнений с числом переменных

1. Метод обратной матрицы. Для решения указанной выше системы уравнений первым способом необходимо найти сначала обратную матрицу A^{-1} (любым методом), а затем найти неизвестный вектор по формуле $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$. Заметим, что здесь мы имеем дело с частным случаем решения матричного уравнения, рассмотренного в предыдущей главе.

Пример 2.1

Решим методом обратной матрицы систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

Решение

Обратную матрицу вычислим методом элементарных преобразований $(A\,|\,E) \to$ $\to (E\,|\,A^{-1})$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{cases} 3C_1/5 - 2C_2/5 + C_3/5 \to C_1, \\ -2C_1/5 + 3C_2/5 + C_3/5 \to C_2, \to \\ -C_1/5 - C_2/5 + 3C_3/5 \to C_3 \end{cases}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/5 & -2/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & -2/5 & 3/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & -1/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Поскольку в правой половине получившейся матрицы стоит матрица A^{-1}, то решение системы находим по формуле

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

т.е. $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$.

2. Метод Крамера. Метод основан на следующей теореме.

Теорема 2.1 (Крамера). *Если определитель системы* $\Delta = |A| \neq 0$, *то решение системы находится по формулам* $x_j = \Delta_j / \Delta$ *для всех j = 1, ..., n, где* Δ_j *— определитель, который получается из определителя системы* Δ *заменой в нем j-го столбца столбцом компонент вектора* $\vec{b}$.

Действительно, из формулы $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ и выражения для обратной матрицы имеем $\vec{x} = (A'/\Delta)\vec{b}$, где присоединенная матрица $A' = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$.

Произведение j-го столбца матрицы A' на вектор равно сумме произведений компонент этого вектора на соответствующие алгебраические дополнения к элементам j-го столбца начальной матрицы A. По свойству 8 определителей такая сумма равна как раз определителю Δ_j. Следовательно, для компоненты искомого вектора x_j справедливо утверждение теоремы.

Пример 2.2

Решим методом Крамера систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение

Вычислим основной и вспомогательные определители системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{vmatrix}=-3;\ \Delta_1=\begin{vmatrix}3&1&1\\2&2&-1\\4&-1&2\end{vmatrix}=-9;\ \Delta_2=\begin{vmatrix}1&3&1\\1&2&-1\\1&4&2\end{vmatrix}=1;\ \Delta_3=\begin{vmatrix}1&1&3\\1&2&2\\1&-1&4\end{vmatrix}=-1.$$

По формулам Крамера получаем решение:

$$x_1=\Delta_1/\Delta=3;\ \ x_2=\Delta_2/\Delta=-1/3;\ \ x_3=\Delta_3/\Delta=1/3.$$

---

3. Метод Гаусса. При решении системы уравнений методом Гаусса мы сначала приводим матрицу A к ступенчатому виду (это всегда можно сделать с помощью элементарных преобразований над строками матрицы или подобрав подходящую матрицу-множитель). В результате мы придем к новой матрице C и новой (равносильной) системе линейных уравнений с правой частью $\vec{f}$:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}\to\begin{cases}c_{11}x_1+c_{12}x_2+\ldots+c_{1n}x_n=f_1,\\0+c_{22}x_2+\ldots+c_{2n}x_n=f_2,\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\0+0+\ldots+c_{nn}x_n=f_n.\end{cases}$$

Отметим, что при $\Delta\neq 0$ на диагонали матрицы C нет нулей. Все компоненты x_i находятся последовательно, начиная с нижней строчки последней системы. Главное — привести матрицу к ступенчатому виду!

Пример 2.3

Решим систему уравнений, уже рассмотренную выше, методом Гаусса.

Решение

Символом C_i, как и в предыдущей главе, обозначаем i-ю строку. Комбинируя строки, приводим матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=3,\\x_1+2x_2-x_3=2,\\x_1-x_2+2x_3=4\end{cases}\to\begin{pmatrix}C_1\to C_1\\C_2\to C_2-C_1\\C_3\to C_3-C_1\end{pmatrix}\to\begin{cases}x_1+x_2+x_3=3,\\0+x_2-2x_3=-1,\\0-2x_2+x_3=1\end{cases}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}C_1\to C_1\\C_2\to C_2\\C_3\to C_3+2C_2\end{pmatrix}\to\begin{cases}x_1+x_2+x_3=3,\\0+x_2-2x_3=-1,\\0+0-3x_3=-1.\end{cases}$$

Решая уравнения последовательно снизу вверх:

$$x_3=-1/(-3);\ x_2=-1+2x_3;\ x_1=3-x_2-x_3,$$

получаем решение $x_1=3; x_2=-1/3; x_3=1/3.$

2.2. Решение системы линейных уравнений общего вида

Система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

в матричной форме имеет тот же вид, что и при $m = n$: $A\vec{x} = \vec{b}$. Если $\vec{b} = 0$, то система называется *однородной*, в противном случае — *неоднородной*. Если система имеет хотя бы одно решение, она называется *совместной*, в противном случае — *несовместной*. Две системы уравнений называются *эквивалентными*, если множества их решений совпадают. Дополнив матрицу A системы столбцом свободных членов, получим *расширенную матрицу* системы $\overline{A} = (A\,|\,\vec{b})$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \to \ \vec{A} = \left(A\,|\,\vec{b}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что всегда $\operatorname{rang} A \le \operatorname{rang} \overline{A}$.

Теорема 2.2 (Кронекера — Капелли). *Для того чтобы система уравнений была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее матрицы совпадал с рангом расширенной матрицы:* $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A}$.

Доказательство. Необходимость. Если система совместна, то существуют такие числа $x_1, x_2, ..., x_n$, не равные нулю одновременно (мы рассматриваем неоднородную систему уравнений), которые, умноженные на соответствующие столбцы матрицы A, дают в сумме столбец свободных членов, т.е. столбец свободных членов есть линейная комбинация столбцов матрицы A и его добавление при переходе к матрице $\overline{A}$ не меняет ранга.

Достаточность. Если $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = r \le n$, то найдется r столбцов матрицы A (и $\overline{A}$), через которые выражаются все остальные столбцы, включая столбец свободных членов. В качестве значений неизвестных $x_1, x_2, ..., x_r$ выбираются коэффициенты в этой линейной комбинации. Остальные неизвестные в случае $n > r$ можно положить равными нулю. Это и будет одним из решений нашей системы уравнений.

Для совместных систем уравнений справедливы следующие утверждения.

1. Если ранг матрицы системы равен числу неизвестных ($r = n$), то решение единственно.

Действительно, в этом случае мы можем оставить n линейно независимых уравнений, которым соответствует матрица n-го порядка с ненулевым определителем. По формулам Крамера мы найдем единственное решение. Это решение превращает в тождества остальные уравнения, поскольку те являются линейной комбинацией уравнений, выбранных нами.

2. Если ранг матрицы меньше числа неизвестных ($r < n$), то система называется неопределенной и имеет бесконечное множество решений.

Действительно, выберем r линейно независимых строк матрицы системы и оставим только уравнения, соответствующие этим строкам. Переставим столбцы так, чтобы в левом верхнем углу стоял ненулевой минор. Далее перенесем все слагаемые, не содержащие первые r неизвестных, в правую часть уравнений. Согласно формулам Крамера каждому из *бесконечного* числа наборов значений остальных $n - r$ неизвестных соответствует свое решение. Остальные уравнения удовлетворяются автоматически.

В последнем случае мы имеем дело с *укороченной* системой, которая эквивалентна исходной. Неизвестные, оставшиеся в левой части уравнений, называются *базисными*, а остальные $n - r$ штук — *свободными*. Выбрав произвольным образом значения свободных переменных $x_{r+1} = c_1$; $x_{r+2} = c_2; \ldots; x_n = c_{n-r}$, найдем решение исходной системы как функцию $n - r$ констант. Такое решение системы называется *общим*. Конкретное решение системы (запишем его в виде вектор-строки) имеет вид

$$\vec{x}(\{c_i\}) = (x_1(c_1, \ldots, c_{n-r}), \ldots, x_r(c_1, \ldots, c_{n-r}), c_1, \ldots, c_{n-r}).$$

В случае если все константы $c_i = 0$ для $i = 1, 2, \ldots, n - r$, решение называется *базисным*.

2.3. Однородные системы уравнений

Особо отметим, что *однородные системы линейных уравнений* (*ОСЛУ*) всегда имеют нулевое решение. Оно называется тривиальным. Для существования нетривиального решения однородной системы необходимо и достаточно, чтобы ранг системы был меньше числа неизвестных ($r < n$), что следует из доказанных в предыдущем параграфе утверждений.

Очевидно, что любая линейная комбинация решений ОСЛУ сама является решением той же системы. Действительно, однородную систему уравнений можно записать в матричном виде: $A\vec{x} = 0$. Если $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ — решения этой системы ($A\vec{x}_1 = 0$ и $A\vec{x}_2 = 0$), то согласно правилам действия с матрицами для произвольной линейной комбинации указанных решений системы $\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2$ получаем

$$A \cdot (\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2) = \alpha A \cdot \vec{x}_1 + \beta A \cdot \vec{x}_2 = 0.$$

Поэтому имеет смысл найти максимальное число линейно независимых ненулевых решений, через которые выразятся все остальные решения. Они образуют *фундаментальную систему решений*. Очевидно, что число линейно независимых решений ровно $n - r$. Действительно, в качестве фундаментальной системы решений можно выбрать общие решения (см. выше), в которых все константы c_i, кроме одной, равны нулю. Таких решений ровно $n - r$. Базисное же решение ОСЛУ является нулевым.

Пример 2.4

Найдем фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Выбирая в качестве базисных переменных первые две и перенося остальные в правую часть уравнений, перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = x_3 - x_4, \\ 2x_1 - x_2 = 2x_3 + x_4. \end{cases}$$

Решение ее есть

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4, \\ x_2 = x_4. \end{cases}$$

Обозначая $x_3 = c_1$ и $x_4 = c_2$, можем записать общее решение системы уравнений в форме вектор-строки: $\vec{x}_{\text{об}} = (c_1 + c_2, c_2, c_1, c_2)$. Это общее решение можно выразить в виде линейной комбинации фундаментальных решений, а именно: $\vec{x}_{\text{об}} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2$, где фудаментальные решения $\vec{e}_1 = (1,0,1,0)$ и $\vec{e}_2 = (1,1,1,0)$ получаются из общего приравниванием одной свободной константы к единице, а другой — к нулю ($c_1 = 1$; $c_2 = 0$ или $c_1 = 0$; $c_2 = 1$).

Заметим, что разность двух решений системы линейных уравнений равна решению соответствующей ОСЛУ. Действительно, если $A\vec{x} = b$ и $A\vec{y} = b$, то справедливо $A(\vec{x} - \vec{y}) = 0$. Следовательно, *общее решение неоднородной системы уравнений можно представить в виде суммы общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной.*

Пример 2.5

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 3x_1 + 0 + 5x_3 = 10, \end{cases}$$

предварительно проверив ее совместность.

Решение

Определитель системы $|A| = -5 + 12 + 3 - 10 = 0$, а $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = 2$, так как есть отличный от нуля минор второго порядка $M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$ и третья строка расширенной матрицы есть линейная комбинация двух первых: $C_3 = C_1 + 2C_2$. Система совместна. Оставляя два первых уравнения, решаем их:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 - x_3, \\ x_1 - x_2 = 3 - 2x_3 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = 5(2 - x_3)/3, \\ x_2 = (1 + x_3)/3. \end{cases}$$

Получаем общее и базисное решения:

$$\vec{x}_{\text{об}} = (5(2-c)/3, (1+c)/3, c); \vec{x}_{\text{б}} = (10/3, 1/3, 0).$$

Общее решение соответствующей однородной системы (нашей системы с нулевыми правыми частями) равно $\vec{x}_{\text{об од}} = (-5c/3, c/3, c) = c(-5/3, 1/3, 1)$. Поэтому справедливо равенство $\vec{x}_{\text{об}} = \vec{x}_{\text{об од}} + \vec{x}_{\text{б}}$.

Пример 2.6

Проверим совместность еще одной системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 0 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$