ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. А. Каштанов, Н. Ю. Энатская

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

УЧЕБНИК И ПРАКТИКУМ
ДЛЯ ПРИКЛАДНОГО БАКАЛАВРИАТА

Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебника и практикума для студентов высших учебных заведений, обучающихся по инженерно-техническим направлениям

Книга доступна в электронной библиотечной системе
biblio-online.ru

Москва ▪ Юрайт ▪ 2019

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171я73
К31

***Авторы*:**

Каштанов Виктор Алексеевич — профессор, доктор физико-математических наук, профессор Департамента прикладной математики Московского института электроники и математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», заслуженный деятель науки Российской Федерации, лауреат Государственной премии СССР;

Энатская Наталия Юрьевна — доцент, кандидат физико-математических наук, доцент Департамента прикладной математики Московского института электроники и математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики».

***Рецензенты*:**

Ивченко Г. И. — доктор физико-математических наук, профессор общеинститутской кафедры высшей математики Московского института электроники и математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»;

Колчин В. Ф. — доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Математического института имени В. А. Стеклова Российской академии наук.

Каштанов, В. А.

К31 Случайные процессы : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / В. А. Каштанов, Н. Ю. Энатская. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 156 с. — (Серия : Бакалавр. Прикладной курс).

ISBN 978-5-534-04482-9

Учебник содержит изложение раздела вероятностного направления подготовки специалистов «Теория случайных процессов». Эта математическая дисциплина, наряду с теорией вероятностей и математической статистикой, составляет основу вероятностного образования студентов. Приводятся общие сведения по теории случайных процессов, подробно изложен материал по теории марковских процессов с дискретным временем (цепи Маркова) и непрерывным временем. Приведена классификация состояний и цепей Маркова, подробно изучены свойства пуассоновских процессов. Представлены основы теории ветвящихся процессов и процессов восстановления. Приведены примеры и задачи для иллюстрации теории и пояснения ее практического использования. Кроме решенных задач по всем главам учебника предложены задачи для самостоятельного решения и теоретические вопросы для самоконтроля и лучшего понимания материала.

Учебник соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования.

Для студентов инженерно-технических специальностей.

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171я73

ISBN978-5-534-04482-9

Оглавление

Предисловие

Во вводном курсе «Теория вероятностей» излагаются понятия эксперимента и случайной величины и изучаются их свойства. На практике модель неопределенности, которая описывается случайными величинами, имеет один принципиальный недостаток — она не учитывает фактор времени, присущий всем происходящим вокруг нас процессам.

Таким образом, ликвидируя этот недостаток, приходим к определению ***случайного процесса*** как модели стохастической неопределенности, учитывающей фактор времени и, следовательно, более полно и точнее описывающей реально происходящие процессы.

В самом простом случае реализацией случайной величины является число, а реализацией случайного процесса — функция времени.

Не вдаваясь в математические тонкости, случайный процесс можно определить как случайную функцию времени, т.е. изменение во времени состояния некоторой системы, эволюция которой не определяется однозначно, а зависит от случая. Актуальность изучения таких процессов очевидна, так как они вокруг нас.

Модель случайного процесса является обобщением понятия случайной величины, поэтому для изучения предмета «Случайные процессы» необходимо знакомство с курсом «Теория вероятностей», который является базовым для курса «Случайные процессы». Вместе с курсом «Математическая статистика» эти дисциплины составляют основу вузовского вероятностного образования студентов инженерно-технических направлений.

Успех исследования и практического использования этих моделей связан с грамотным определением ограничений.

Учитывая это обстоятельство, в учебник включены основные практически востребованные и фундаментальные вопросы случайных процессов, в том числе подробно рассмотрены марковские цепи с дискретным временем и проведена классификация их состояний, процессы восстановления, а также марковские цепи (процессы) с непрерывным временем и конечным или счетным множеством состояний, широко используемые в теории надежности и теории массового обслуживания. Отдельно детально обсуждаются пуассоновские и ветвящиеся процессы.

Изучаются стационарные случайные процессы, их числовые характеристики, линейные преобразования и представления.

Для иллюстрации теории приведено много примеров с решениями и для самостоятельной работы. Глубина погружения и выбор рассматриваемых тем учебника определяются ограниченностью учебного времени изучения дисциплины и математическими программами студентов инженерно-технических направлений. Учебник предназначен для использования в учебном процессе бакалавриата этих направлений.

В результате изучения данного учебника студенты должны:

знать

• основы теории случайных процессов;

• цепи Маркова, марковские, пуассоновские процессы;

• ветвящиеся процессы;

• процессы восстановления;

• числовые характеристики случайных процессов;

уметь

• решать задачи теории случайных процессов;

• применять анализ марковских процессов к решению задач теории массового обслуживания;

владеть

• методами анализа случайных процессов.

Основные обозначения

СВ — случайная величина;
ч.т.д. — что и требовалось доказать;
нз — независимые;
нк — некоррелированные;
MX или EX — математическое ожидание СВ X;
DX — дисперсия СВ X;
K_{XY} — корреляция СВ X и Y;
r_{XY} — коэффициент корреляции СВ X и Y;
СВ $X \sim L(a)$ — означает, что СВ X имеет закон распределения $L(a)$, где $a = (a_1, ..., a_k)$ — k-мерный параметр распределения;
СВ $X \sim B(1, p)$ — бернуллиевское распределение;
СВ $X \sim B(n, p)$ — биномиальное распределение;
СВ $X \sim \pi(\lambda)$ — пуассоновское распределение;
СВ $X_i \sim G(p)$ — геометрическое распределение;
СВ $Y_i \sim$ сд$G(p)$ — сдвинутое геометрическое распределение;
СВ $Z_1 \sim$ Па(r, p) — распределение Паскаля;
СВ $Z_2 \sim OB(r, p)$ — отрицательное биномиальное распределение;
СВ $X \sim H(N, M, n)$ — гипергеометрическое распределение;
СВ $X \sim R[a; b]$ — равномерное распределение на отрезке $[a; b]$;
СВ $X_0 \sim R[0; 1]$ — равномерное распределение на отрезке $[0; 1]$;
СВ $X \sim N(a, \sigma)$ — нормальное распределение с параметрами (a, σ);
СВ $X_0 \sim N(0, 1)$ — нормальное распределение с параметрами $(0, 1)$;
СВ $X \sim \Gamma_{\alpha, \lambda}$ — гамма-распределение;
СВ $X \sim E(\lambda)$ — экспоненциальное распределение.

Глава 1
НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ЦЕПЯМ МАРКОВА

В результате изучения данной главы студенты должны:

знать

• основные сведения о случайных процессах и свойствах цепей и процессов Маркова;

уметь

• проверять марковское свойство;

• рассчитывать вероятности состояний цепи Маркова;

владеть

• навыками анализа цепей Маркова и моделированием их значений.

В главе даются основные понятия теории случайных процессов и их классификация. В качестве одного из важнейших объектов начального курса подробно рассматриваются марковские процессы с дискретным временем. Подробно объяснены их специфика, свойства и задание через матрицу переходных вероятностей и вектора начальных вероятностей процесса. Изучаются свойства характеристической матрицы. Приведено много примеров цепей Маркова с проверкой марковского свойства и с расчетом вероятностей состояний за фиксированное число шагов.

1.1. Начальные сведения о случайных процессах

Любая меняющаяся система, находящаяся под влиянием случайных факторов, представляет собой случайный процесс. Иначе: ***случайным процессом*** называется семейство случайных величин, зависящих от параметра t, пробегающего произвольное множество T. В частности, если множество T состоит из одной точки, мы имеем случайную величину. Значение $X(t)$ случайной величины при фиксированном значении параметра t называется ***значением случайного процесса*** в данный момент времени. $X(t)$ может быть векторной, скалярной величиной, функцией и т.д.

Чтобы задать случайный процесс $X(t)$, обычно для каждого натурального значения n и любых возможных значений $t_1, ..., t_n$ параметра t задают n-мерную функцию распределения вектора $X(t_1), ..., X(t_n)$ (это конечномерные распределения):

$$F(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n) = P\{X(t_1) < x_1, ..., X(t_n) < x_n\}.$$

При этом на $F(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n)$ накладываются два условия:

а) условие симметрии (инвариантности): для любой перестановки индексов

$$\begin{matrix} 1 & ... & n \\ i_1 & ... & i_n \end{matrix}$$

выполняется равенство

$$F(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n) = F(x_{i_1}, ..., x_{i_n}; t_{i_1}, ..., t_{i_n});$$

б) условие согласованности: при $m < n$ для любых $t_{m+1}, t_{m+2}, ..., t_n$ выполняется равенство

$$F(x_1, x_2, ..., x_m, \infty, ..., \infty; t_1, t_2, ..., t_m, t_{m+1}, t_{m+2}, ..., t_n) =$$
$$= F(x_1, ..., x_m; t_1, ..., t_m).$$

Основные признаки, по которым различаются случайные процессы, касаются природы пространства состояний S; временнóго параметра T; отношения зависимости между временем наблюдения системы и ее состоянием, а именно:

а) S — пространство возможных состояний, т.е. пространство всех возможных значений случайного процесса $X(t) = x_t$. Если $S = 0, 1, 2, ...$, то это целочисленный процесс, если $S \in (-\infty, \infty)$, то это действительный процесс, если S — евклидово k-мерное пространство, то это k-мерный процесс;

б) если $T = 0, 1, 2, ...$, то $\{x_t\}$ — случайный процесс с дискретным временем; если $T \in (0, \infty)$, то $\{x_t\}$ — случайный процесс с непрерывным временем;

в) отношение зависимости определяется семейством конечномерных распределений $\{F(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n)\} = \{F_n\}$.

Случайный процесс полностью задан, если определены его S, T и $\{F_n\}$.

1.2. Определения цепи Маркова

Определение 1.1. Процесс (протекающий в физической системе) называется ***марковским***, если для каждого момента времени вероятность любого состояния системы в будущем зависит от состояния системы в настоящий момент и не зависит от того, каким образом система пришла в это состояние. Цепь Маркова — это целочисленный марковский процесс с дискретным временем.

Подробнее: пусть G — некоторый эксперимент, имеющий конечное или счетное множество исходов $\{E_1, E_2, ..., E_n, ...\}$.

Будем повторять эксперимент. Номер исхода n-го эксперимента обозначим x_n. Если в n-м опыте реализовалось событие E_{i_n}, то будем считать, что $x_n = i_n$ (в n-м событии E_{i_n}).

Приведем два определения цепи Маркова.

Определение 1.2 (первое определение цепи Маркова). Последовательность случайных величин $\{X_n\}$ образует ***цепь Маркова***, если

$$P\{x_n = j_n / x_1 = i_1, x_2 = i_2, ..., x_{n-1} = i_{n-1}\} = \\ = P\{x_n = j_n = j / x_{n-1} = i_{n-1} = i\} = P_{ij}(n), \qquad (1.1)$$

где $P_{ij}(n)$ — вероятность перехода на n-м шаге из состояния $E_{i_{n-1}} = E_j$ в состояние $E_{i_n} = E_j$.

Событие, стоящее в условии (1.1), будем называть ***предысторией*** события в момент n.

Определение 1.3 (второе определение цепи Маркова). Последовательность случайных величин $\{x_n\}$ образует ***цепь Маркова***, если для любого набора целых чисел $n_1 < n_2 < ... < n_r < n$ верно, что

$$P\{x_n = j / x_{n_1} = i_1, x_{n_2} = i_2, ..., x_{n_{r-1}} = i_{r-1}, x_{n_r} = i\} = \\ = P\{x_n = j / x_{n_r} = i\}. \qquad (1.2)$$

Докажем эквивалентность приведенных здесь двух определений цепи Маркова.

Доказательство. Очевидно, что из второго определения следует первое, если в качестве набора чисел $n_1, n_2, ..., n_r$ взять числа 1, 2, 3, ..., n.

Чтобы доказать, что из первого определения следует второе, воспользуемся методом математической индукции. Для этого проверим выполнение условия (1.2), когда выполнено условие (1.1), сначала при любом конкретном значении $n_r = n - i$. Очевидно, что при $i = 1$ из условия (1.1) следует условие (1.2), так как если к предыстории правой части условия (1.1) добавим информацию, от которой событие не зависит, в виде события $\{x_{n-2} = i_{n-2}, ..., x_1 = i_1\}$, равенство останется верным.

Теперь предполагаем, что условие (1.2) следует из условия (1.1) для $n_r = n - k$ при $k = 1, ..., n - 1$, т.е. верно, что

$$P\{x_n = i_n = j / x_{n_1} = i_1, ..., x_{n-k} = i_{n-k} = i\} = P\{x_n = j / x_{n-1} = i\}.$$

Тогда докажем, что справедливо аналогичное равенство при $i = k + 1$, т.е. при $n_r = n - k - 1$:

$$P\{x_n = i_n = j / x_{n_1} = i_1, ..., x_{n-k-1} = i_{n-k-1} = i\} = \\ = \frac{P\{x_n = j, x_{n-k-1} = i_1, x_{n_{r-1}} = i_{r-1}, ..., x_{n_1} = i_1\}}{P\{x_{n-k-1} = i, x_{n_{r-1}} = i_{r-1}, ..., x_{n_1} = i_1\}} =$$

$$=\frac{\sum_l P\{x_n=j,x_{n-k}=l,x_{n-k-1}=i,\ ...,x_{n_1}=i_1\}}{P\{x_{n-k-1}=i,x_{n_{r-1}}=i_{r-1},\ ...,x_{n_1}=i_1\}}=$$

$$=\frac{\sum_l P\{x_n=j/x_{n-k}=l,x_{n-k-1}=i\}P\{x_{n-k}=l,x_{n-k-1}=i,...,x_{n_1}=i_1\}}{P\{x_{n-k-1}=i,x_{n_{r-1}},\ ...,x_{n_1}=i_1\}}=$$

$$=\sum_l P\{x_n=j/x_{n-k}=l,x_{n-k-1}=i\}P\{x_{n-k}=l/x_{n-k-1}=i\}=$$

$$=\sum_l \frac{P\{x_n=j,x_{n-k}=l,x_{n-k-1}=i\}P\{x_{n-k}=l,x_{n-k-1}=i\}}{P\{x_{n-k}=l,x_{n-k-1}=i\}P\{x_{n-k-1}=i\}}=$$

$$=\sum_l \frac{P\{x_n=j,x_{n-k}=l,x_{n-k-1}=i\}}{P\{x_{n-k-1}=i\}}=$$

$$=\frac{1}{P\{x_{n-k-1}=i\}}\sum_l P\{x_n=j,x_{n-k}=l,\ x_{n-k-1}=i\}=$$

$$=\frac{P\{x_n=j,x_{n-k-1}=i\}}{P\{x_{n-k-1}=i\}}=P\{x_n=j/x_{n-k-1}=i\},\text{ ч.т.д.}$$

1.3. Свойства траекторий цепей Маркова

Под траекторией понимается последовательность состояний цепи Маркова. Рассмотрим свойства траекторий.

1. Фиксированная траектория в будущем при полной информации о прошлом.

Докажем, что

$$P\{x_{n+k}=i_{n+k},\ ...,\ x_n=i_n/x_{n-1}=i_{n-1},\ ...,\ x_1=i_1\}=$$
$$=P\{x_{n+k}=i_{n+k},\ ...,\ x_n=i_n/x_{n-1}=i_{n-1}\}.$$

Доказательство

$$P\{x_{n+k}=i_{n+k},...,x_n=i_n/x_{n-1}=i_{n-1},\ ...,x_1=i_1\}=$$

$$=\frac{P\{x_{n+k}=i_{n+k},...,x_{1=i_1}\}}{P\{x=i_{n-1},...,x_{1=i_1}\}}=\frac{P\{x_{n+k}=i_{n+k},...,x_1=i_1\}}{P\{x_{n+k-1}=i_{n+k-1},...,x_1=i_1\}}\times$$

$$\times\frac{P\{x_{n+k-1}=i_{n+k-1},...,x_1=i_1\}}{P\{x_{n+k-2}=i_{n+k-2},...,x_1=i_1\}}\cdots\frac{P\{x_n=i_{n+k},...,x_1=i_1\}}{P\{x_{n-1}=i_{n-1},...,x_1=i_1\}}=$$

$$=P\{x_{n+k}=i_{n+k}/x_{n+k-1}=i_{n+k-1},...,x_{n-1}=i_{n-1}\}\times$$

$$\times P\{x_{n+k-1}=i_{n+k-1}/x_{n+k-2}=i_{n+k-2},...,x_{n-1}=i_{n-1}\}\cdots P\{x_n\}=$$

$$=\{i_n/x_{n-1}=i_{n-1}\}=\frac{P\{x_{n+k}=i_{n+k},...,x_{n-1}=i_{n-1}\}}{P\{x_{n+k-1}=i_{n+k-1},...,x_{n-1}=i_{n-1}\}}=$$

$$=\frac{P\{x_{n+k-1}=i_{n+k-1},...,x_{n-1}=i_{n-1}\}}{P\{x_{n+k-2}=i_{n+k-2},...,x_{n-1}=i_{n-1}\}}\cdots\frac{P\{x_n=i_n,x_{n-1}=i_{n-1}\}}{P\{x_{n-1}=i_{n-1}\}}=$$

$$=\frac{P\{x_{n+k}=i_{n+k},...,x_{n-1}=i_{n-1}\}}{P\{x_{n-1}=i_{n-1}\}}=P\{x_{n+k}=i_{n+k},...,x_n=i_n/x_{n-1}=i_{n-1}\},\text{ ч.т.д.}$$

2. Фиксированная траектория в будущем при неполной информации о прошлом.

Докажем, что при $1 \leqslant n_1 < n_2 < ... < n_r \leqslant n$, $r \leqslant n$

$$P\{x_{n+k} = i_{n+k}, ..., x_n = i_n / x_{n_r} = i_{n_r}, ..., x_{n_1} = i_{n_2}\} =$$
$$= P\{x_{n+k} = i_{n+k}, ..., x_n = i_n / x_{n_r} = i_{n_r}\}.$$

Доказательство

$$P\{x_{n+k} = i_{n+k}, ..., x_n = i_n / x_{n_r} = i_{n_r}, ..., x_{n_1} = i_{n_2}\} =$$
$$= \frac{P\{x_{n+k} = i_{n+k}, ..., x_n = i_n, x_{n_r} = i_{n_r}, ..., x_{n_1} = i_{n_1}\}}{P\{x_{n_r} = i_{n_r}, ..., x_{n_1} = i_{n_1}\}} =$$
$$= \frac{P\{x_{n+k} = i_{n+k}, ..., x_n = i_n, x_{n_r} = i_{n_r}, ..., x_{n_1} = i_{n_1}\}}{P\{x_{n+k-1} = i_{n+k-1}, ..., x_n = i_n, x_{n_r} = i_{n_r}, ..., x_{n_1} = i_{n_1}\}} \times$$
$$\times \frac{P\{x_{n+k-1} = i_{n+k-1}, ..., x_n = i_n, x_{n_r} = i_{n_r}, ..., x_{n_1} = i_{n_1}\}}{P\{x_{n+k-2} = i_{n+k-2}, ..., x_n = i_n, x_{n_r} = i_{n_r}, ..., x_{n_1} = i_{n_1}\}} \cdots$$
$$\cdots \frac{P\{x_n = i_n, x_{n_r} = i_{n_r}, ..., x_{n_1} = i_{n_1}\}}{P\{x_{n_r} = i_{n_r}, ..., x_{n_1} = i_{n_1}\}} =$$
$$= P\{x_{n+k} = i_{n+k} / x_{n+k-1} = i_{n+k-1}\} \times$$
$$\times P\{x_{n+k-1} = i_{n+k-1} / x_{n+k-2} = i_{n+k-2}\} \cdots P\{x_n = i_n / x_{n_r} = i_{n_r}\} =$$
$$= P\{x_{n+k} = i_{n+k} / x_{n+k-1} = i_{n+k-1}, ..., x_n = i_n, x_{n-1} = i_{n-1}, ..., x_{n_r}\} =$$
$$= P\{i_{n_r}\} P\{x_{n+k-1} = i_{n+k-1} / x_{n+k-2} = i_{n+k-2}, ..., x_n = i_n, x_{n-1}\} =$$
$$= P\{i_{n-1}, ..., x_{n_r} = i_{n_r}\} ... P\{x_n = i_n / x_{n_r} = i_{n_r}\} =$$
$$= \frac{P\{x_{n+k} = i_{n+k}, ..., x_n = i_n, x_{n_r} = i_{n_r}\}}{P\{x_{n+k-1} = i_{n+k-1}, ..., x_n = i_n, x_{n_r} = i_{n_r}\}} \times$$
$$\times \frac{P\{x_{n+k-1} = i_{n+k-1}, ..., x_n = i_n, x_{n_r} = i_{n_r}\}}{P\{x_{n+k-2} = i_{n+k-2}, ..., x_n = i_n, x_{n_r} = i_{n_r}\}} \cdots$$
$$\cdots \frac{P\{x_n = i_n, x_{n_r} = i_{n_r}\}}{P\{x_{n_r} = i_{n_r}\}} = \frac{P\{x_{n+k} = i_{n+k}, ..., x_n = i_n, x_{n_r} = i_{n_r}\}}{P\{x_{n_r} = i_{n_r}\}} =$$
$$= P\{x_{n+k} = i_{n+k}, ..., x_n = i_n / x_{n_r} = i_{n_r}\}, \text{ ч.т.д.}$$

3. Любая траектория в будущем при полной информации о прошлом.

Докажем, что

$$P\{x_{n+k} \in A_k, ..., x_n \in A_0 / x_{n-1} = i_{n-1}, ..., x_1 = i_1\} =$$
$$= P\{x_{n+k} \in A_k, ..., x_n \in A_0 / x_{n-1} = i_{n-1}\}.$$

Доказательство

$$P\{x_{n+k} \in A_k, ..., x_n \in A_0 / x_{n-1} = i_{n-1}, ..., x_1 = i_1\} =$$
$$= \frac{P\{x_{n+k} \in A_k, ..., x_n \in A_0, x_{n-1} = i_{n-1}, ..., x_1 = i_1\}}{P\{x_{n-1} = i_{n-1}, ..., x_1 = i_1\}} =$$
$$= \frac{\sum\limits_{j_s \in A_s} P\{x_{n+k} = j_k, \ldots, x_n = j_0, x_{n-1} = i_{n-1}, ..., x_1 = i_1\}}{P\{x_{n-1} = i_{n-1}, ..., x_1 = i_1\}} =$$
$$= \sum_{j_s \in A_s} P\{x_{n+k} = j_k, ..., x_n = j_n / x_{n-1} = i_{n-1}, ..., x_1 = i_1\} =$$
$$= \sum_{j_s \in A_s} P\{x_{n+k} = j_{n+k}, ..., x_n = j_n / x_{n-1} = i_{n-1}\} =$$
$$= \sum_{j_s \in A_s} \frac{P\{x_{n+k} = j_{n+k}, ..., x_n = j_0, x_{n-1} = i_{n-1}\}}{x_{n-1} = i_{n-1}} =$$
$$= P\{x_{n+k} \in A_k, \ldots, x_n \in A_0 / x_{n-1} = i_{n-1}\}, \text{ ч.т.д.}$$

4. Любая траектория в будущем при неполной информации о прошлом.

Докажем, что при $1 \leqslant n_1 < n_2 < ... < n_r \leqslant n$, $r \leqslant n$

$$P\{x_{n+k} \in A_k, ..., x_n \in A_0 / x_{n_r} = i_{n_r}, ..., x_{n_1} = i_{n_1}\} =$$
$$= P\{x_{n+k} \in A_k, ..., x_n \in A_0 / x_{n_r} = i_{n_r}\}.$$

Доказательство

$$P\{x_{n+k} \in A_k, ..., x_n \in A_0 / x_{n_r} = i_{n_r}, ..., x_{n_1} = i_{n_1}\} =$$
$$= \frac{P\{x_{n+k} \in A_k, ..., x_n \in A_n, x_{n_r} = i_{n_r}, ..., x_{n_1} = i_{n_1}\}}{P\{x_{n_r} = i_{n_r}, ..., x_{n_1} = i_{n_1}\}} =$$
$$= \frac{\sum\limits_{j_s \in A_s} P\{x_{n+k} = j_k, ..., x_n = j_0, x_{n_r} = i_{n_r}, ..., x_{n_1} = i_{n_1}\}}{P\{x_{n_r} = i_{n_r}, ..., x_{n_1} = i_{n_1}\}} =$$
$$= \sum_{j_s \in A_s} P\{x_{n+k} = j_k, ..., x_n = j_n / x_{n_r} = i_{n_r}, ..., x_{n_1} = i_{n_1}\} =$$
$$= \sum_{j_s \in A_s} P\{x_{n+k} = j_n, ..., x_n = j_0 / x_{n_r} = i_{n_r}\} =$$
$$= P\{x_{n+k} \in A_k, ..., x_n \in A_0 / x_{n_r} = i_{n_r}\}, \text{ ч.т.д.}$$

5. Любая траектория в будущем при любой траектории в прошлом при фиксированном настоящем.

Докажем, что при $A = \{x_{n+k} \in A_k, ..., x_n \in A_0\}$; $A = \{x_{n-2} \in B_{n-2}, ..., x_n \in B_1\}$ и $x_{n-1} = i_{n-1}$ верно равенство

$$P\{A / x_{n-1} = i_{n-1}, B\} = P\{A / x_{n-1} = i_{n-1}\}.$$

Доказательство

$$P\{A / x_{n-1} = i_{n-1}, B\} = \frac{P\{A, x_{n-1} = i_{n-1}, B\}}{P\{x_{n-1} = i_{n-1}, B\}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{j_s \in B} P\{A, x_{n-1} = i_{n-1}, x_{n-2} = j_{n-2}, ..., x_1 = j_1\}}{P\{x_{n-1} = i_{n-1}, B\}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{j_s \in B} P\{A / x_{n-1} = i_{n-1}\} P\{x_{n-1} = i_{n-1}, x_{n-2} = j_{n-2}, ..., x_1 = j_1\}}{P\{x_{n-1} = i_{n-1}, B\}} =$$

$$= \frac{P\{A / x_{n-1} = i_{n-1}\} P\{x_{n-1} = i_{n-1}, B\}}{P\{x_{n-1} = i_{n-1}, B\}} = P\{A / x_{n-1} = i_{n-1}\}, \text{ ч.т.д.}$$

6. Независимость любых будущего и прошлого при фиксированном настоящем.

Докажем, что любые события $A = \{x_{n+k} = i_{n+k}, ..., x_n = i_n\}$ и $B = \{x_{n-2} = i_{n-2}, ..., x_1 = i_1\}$ при фиксированном настоящем независимы, т.е.

$$P\{A, B / x_{n-1} = i_{n-1}\} = P\{A / x_{n-1} = i_{n-1}\} P\{B / x_{n-1} = i_{n-1}\}.$$

Доказательство

$$P\{A, B / x_{n-1} = i_{n-1}\} = \frac{P\{A, B, x_{n-1} = i_{n-1}\}}{P\{x_{n-1} = i_{n-1}\}} =$$

$$= \frac{P\{A, B, x_{n-1} = i_{n-1}\}}{P\{B, x_{n-1} = i_{n-1}\}} \frac{P\{B, x_{n-1} = i_{n-1}\}}{P\{x_{n-1} = i_{n-1}\}} =$$

$$= P\{A / x_{n-1} = i_{n-1}\} P\{B / x_{n-1} = i_{n-1}\}, \text{ ч.т.д.}$$

1.4. Матрица переходных вероятностей

Определение 1.4. Если вероятность $p_{ij}(n)$ — вероятность перехода из состояния E_i в состояние E_j на n-м шаге — не зависит от n, то цепь Маркова называется ***однородной***.

При $n = 1$ обозначим $p_{ij}(n) = p_{ij}$, а матрицу (p_{ij}) — матрицу одношаговых переходных вероятностей — через P, т.е. $P = (p_{ij})$, где $p_{ij} = P\{x_n = j / x_{n-1} = i\}$.

Свойства матрицы P:

1) $p_{ij} > 0$;

2) $\sum\limits_j p_{ij} = 1$ для любого i.

Определение 1.5. Если для матрицы P выполняются условия 1) и 2), то матрица называется ***стохастической***. Если матрица стохастическая и $\sum\limits_i p_{ij} = 1$ для любого j, то она называется ***дважды стохастической***.

Цепь Маркова *задана*, если заданы матрица ее переходных вероятностей P за один шаг (одношаговая) и вектор начальных вероятностей.

Матрица переходных вероятностей цепи Маркова за *n* шагов

Утверждение 1.1. Матрица переходных вероятностей за n шагов есть n-я степень матрицы переходных вероятностей за один шаг.

Доказательство. Это следует из равенства

$$p_{ij}(n) = \sum_k p_{ik} p_{kj}(n-1), \tag{1.3}$$

где $p_{ij}(m)$ — вероятность перехода из i-го состояния в j-е за m шагов. Действительно, положив в формуле (1.3) $n = 2$, получим $p_{ij}(2) = \sum_k p_{ik}p_{kj}$, что соответствует матричному равенству $P(2) = P^2$, где $P(n)$ — матрица переходных вероятностей за n шагов

Тогда, предполагая по индукции, что утверждение верно для n шагов, и положив $r = n$, докажем аналогичное утверждение для $(n + 1)$-го шага:

$$P(n+1) = P(n)P = P^n P = P^{n+1},$$

что и утверждалось. Остается доказать равенство (1.3):

$$p_{ij}(n) = P\{x_n = j / x_0 = i\} = \frac{P\{x_n = j, x_0 = i\}}{P\{x_0 = i\}} = \frac{\sum_k P\{x_n = j, x_1 = k, x_0 = i\}}{P\{x_0 = i\}} =$$

$$= \frac{\sum_k P\{x_n = j / x_i = k, x_0 = i\} P\{x_1 = k, x_0 = i\}}{P\{x_0 = i\}} =$$

$$= \sum_k P\{x_n = j / x_i = k\} P\{x_1 = k / x_0 = i\} = \sum_k p_{ik}(n-r) p_{ik}(r),$$

что и доказывает равенство (1.3).

Замечание 1.1. Матрица переходных вероятностей для цепи Маркова за n шагов может быть получена непосредственно по вероятностному графу (графическому изображению стрелками переходов в цепи Маркова из любого состояния в любое на каждом шаге с указанием вероятностей этих переходов на стрелках). Ниже это будет показано на конкретных примерах (иногда такой путь для нахождения $P(n)$ является практически единственным).

1.5. Примеры цепей Маркова

Пример 1.1 (блуждание с поглощающими экранами). Рассматриваем блуждание по целочисленным точкам $[0; a]$ по схеме, изображенной на рис. 1.1, *а* (здесь $p + q = 1$, стрелками указаны возможные переходы из состояния в состояние за один шаг).